



Termín odeslání: 30. 5. 2005

Milí řešitelé, milé řešitelky,

jak jsme slíbili, otiskujeme v šestém čísle vzorová řešení a body jak z čísla 11.3, tak i z čísla 11.4. Zároveň uveřejňujeme zadání posledních úloh jedenáctého ročníku. Poté už vydáme jen závěrečné, sedmé číslo, ve kterém budou zbylá vzorová řešení a poslední příspěvky k tématkům. Do výše uvedeného termínu tedy odešlete nejen řešení úloh, ale i všechny své příspěvky k letošním tématkům.

Abyste se mohli těšit a měli další důvod sbírat body, tak oznamujeme, že už známe termín podzimního soustředění: 8.–16. 10. 2005.

Redakce

Zadání úloh

Úloha 6.1 – Duha na Titanu (4b)

Poté, co sonda Huygens objevila pod atmosférou Titanu pevný povrch, není mize s lidskou posádkou směřující na tento Saturnův měsíc až tak nemyslitelná. Představme si teď, že by zmizelo zakalení atmosféry, a případný kosmonaut stojící na povrchu by se rozhlédl krátce po vydatném dešti kapalného metanu. Zpoza mraků by se vynořilo Slunce, a kosmonaut by uviděl duhu. Anebo ne? Kdyby ji uviděl, kde by byla a jak by vypadala?

Možná se vám budou hodit indexy lomu pro kapalný metan při teplotě 100 K a různých vlnových délkách světla λ . V běžných tabulkách je asi nenajdete, takže je zde uvádíme.

λ [nm]	n	λ [nm]	n	λ [nm]	n
488,0	1,291	546,2	1,287	632,8	1,283
514,5	1,289	589,3	1,285	670,0	1,282

Zdroj: J. BADOZ, M. LE LIBOUX, R. NAHOM, G. ISRAEL, F. RAULIN a J. P. TORRE: A sensitive cryogenic refractometer. Application to the refractive index determination of pure or mixed liquid methane, ethane, and nitrogen. 1992.

Úloha 6.2 – Poskakující lidé (3b)

Jistá organizace (<http://www.worldjumpday.org/>) tvrdí, že pokud bude velký počet lidí synchronizovaně skákat, tak dokážou změnit oběžnou dráhu Země, a

zamezit tak globálnímu oteplování. Spočtete, kolik lidí a jak dlouho by muselo skákat, aby ovlivnili oběžnou dráhu Země natolik, aby poloměr dráhy vzrostl o vzdálenost Δr .

Úlohu navrhl Dr.^{MM} Jindra Soukup.

Úloha 6.3 – Musí to být tolik, ale proč? (6b)

Dvě navzájem kolmé přímký rozdělují čtverec na čtyři části, z nichž tři mají obsah 1. Jaký obsah může mít čtvrtá část?

A aby to nebylo tak jednoduché, odpověď dokažte.

Řešení témat

Téma 1 – Podivné plochy

Krychličkové vesmíry

Mgr.^{MM} Matěj Korvas

Pozn. red.: V první části článku autor velmi důkladně rozebírá počty způsobů, kterými můžeme krychli sjednotit za předpokladu, že používáme pouze klasické sjednocování stěn, resp. při využití möbiovského (přesněji möbiovského středově převraccujícího) sjednocování stěn a množství různých topologických prostorů, které takto můžeme získat.

...

Protože je tolik způsobů, jak sjednotit stěny krychle, nebudu je rozebírat všechny zvlášť. Uvedu jenom co mají všechny společného, a potom popíšu některé zvláštní případy. Všech 195 prostorů má stejný objem. Představme si je jako skládačku z krychlí, které na sebe dosedají přesně stěna na stěnu.

Předměty a události, jež se vyskytnou v jedné krychli, se ve stejný čas objeví i ve všech ostatních, a to vždy ve stejné pozici vzhledem k vrcholům krychle, do které spadají.

Krychle, které spolu sousedí obyčejnou stěnou, mají polohu jednotlivých vrcholů danou ostatními krychlemi (tj. těmi, se kterými sousedí), nebo náhodou (je-li krychle bez sjednocených stěn). Pozorovatel uvnitř si nikdy nemůže být jistý, jestli se někde jinde v hyperprostoru¹ nevyskytuje paralelní krychle, protože tato jeho krychli nemůže ovlivnit a naopak. Proto ani v našem prostoru nezáleží na tom, jak budou mít případné další krychle v tomto případě uspořádané vrcholy.

¹ Pozn. red.: Spíše prostoru – nalepené krychle nejsou ve skutečnosti umístěny v $(n + 1)$ ním rozměru, ale jen za neprostupnou překážkou.

Krychle sousedící klasicky sebesjednocenou stěnou jsou souměrné podle této stěny. Krychle sousedící Möbiovsky sebesjednocenou stěnou jsou souměrné podle středu této stěny.²

Krychle sousedící stěnou a , která je ve vedlejší krychli klasicky sjednocená s protilehlou stěnou b , s touto krychlí, je jejím obrazem v posunutí \overline{BA} , kde $B \in b$ a $|BA|$ je vzdálenost b od a . Pokud jsou stěny a a b sjednoceny Möbiovsky, je nová krychle obrazem sousední v posunutí \overline{BA} a poté v osové souměrnosti podle společné osy obou krychlí. Krychle K_2 sousedí s krychlí K_1 v otočení podle průsečnice a s b o 90° směrem, při kterém se b promítne do a . Pokud jsou a a b sjednocené Möbiovsky, musí se po otočení aplikovat ještě osová souměrnost podle osy stěny a kolmé na tuto stěnu pro určení orientace krychle K_2 .



Tímto jsme určili, jak budou uspořádány vrcholy krychlí v našem vesmíru podle vlastností jednotlivých druhů sjednocení. Z toho se odvozuje automatické „kopírování“ všech dalších krychlí vesmíru. Připomeňme si, že veškeré jevy a veškerá hmota se vyskytují zároveň ve všech krychlich, a to vždy ve stejné pozici vzhledem k vrcholům krychle, již náleží. Totéž platí pro vektory sil, pohybu, apod.

Kromě tohoto „automatického kopírování“, které má význam, jen když do vesmíru něco přidáme, nebo z něj odebereme, platí v našem vesmíru všechny fyzikální zákony.³ To znamená, že pro pozorovatele uvnitř nemusí přechody mezi „krychlemi“ tvořit přesné krychle (zvláště při rychlostech blížících se rychlosti světla).⁴ Toto není vada teorie – krychle jsme vytvořili my, ještě než vůbec náš

² Pozn. red.: Autor zde uvažuje poněkud netradiční definici Möbiovské stěny – běžně se definuje tak, že „přilepená krychle“ je stranově převrácená podle jedné z os stran. Potom by průchod Möbiovskou stěnou měnil předmět na jeho zrcadlový obraz. Pokud uvažujeme stěnu, která způsobí přilepení krychle jako středově symetricky zrcadlené, pak k mnohým zajímavým jevům vůbec nedochází – viz dále.

³ Pozn. red.: Alespoň lokálně např. zachování momentu hybnosti při průchodu stranově převracející Möbiovskou stěnou globálně neplatí, platí pouze „lokálně“.

⁴ Pozn. red.: Skutečně nám nic nebrání vztáhnout na daný vesmír Riemannovu geometrii (metriku máme dobře definovanou a prostor můžeme popsat diferencovatelnou varietou) – potom se dá na námi uvažovaný vesmír dobře nasadit i Obecná teorie relativity. Zhodnotit ale fyzikální důsledky je v tomto případě pravděpodobně mimo možnosti řešitelů i redakčního týmu – tím spíše,

vesmír⁵ existoval, proto jsme vně něj a v našem toku času (našem časoprostoru) stále sestává z takových krychlí, z jakých jsme jej vytvořili.⁶

Abych odpověděl na otázku v zadání – vesmír se pozorovateli bude jevit tak, jak bychom ho viděli v naší konstrukci, přičemž sjednocené strany jsou průhledné a vlastnosti nesjednocených nejsou dané (mohou to být pevné stěny pohlcující světlo a sálající teplo nebo zrcadla nebo cokoliv mezi tím – ze zadání to nevyplývá).

Pozorovatel uvidí několik obrazů sebe a objektů ve své krychli, které se budou pohybovat v závislosti na konkrétním sjednocení stěn v jeho krychli. (Pokud vůbec něco uvidí, jestliže s sebou nebude mít Slunce, nebo alespoň sirku – vznikají ve vesmíru vakuové fluktuační, které vedou ke vzniku světla?)⁷



Další otázka v zadání byla, jestli se pozorovatel nerozřízne průchodem o rozhraní nějakých sjednocených stěn. Ze stavby našeho vesmíru je zřejmé, že sjednocení stran ovlivní jen orientaci obrazů krychle, ve které pozorovatel při pohledu ze skutečného vesmíru je, a tím také světelné signály přicházející z těchto obrazů a směry rychlostí obrazů objektů v pozorovatelově krychli. Další význam sjednocení stran nemají.⁸ Pozorovatel v bedně se

tedy nemůže přechodem přes rozhraní sjednocených stran (ne nutně navzájem) rozříznout. Může se samozřejmě v některých případech srazit sám se sebou.

To si myslím, že by stačilo ke všem krychličkovým prostorům obecně. Nyní se budu věnovat některým zvláštním případům.

První si vypůjčím ze zadání – „nekonečný tunel“. Těleso se zde nemůže srazit samo se sebou právě když nemá žádný rozměr delší než strana krychle. Zajímavé je, jak tu skončí taková tělesa, na jejichž tvar má soudržnost molekul v porovnání s gravitační silou malý vliv (např. kapka vody, Slunce, nebo

že jde o vesmír, kde (se započítáním obrazů) je nekonečné množství hmoty symetricky rozložené a podléhající velmi specifickým pravidlům.

⁵ Myšleno vesmír sestavený z krychliček.

⁶ Pozn. red.: Lépe řečeno: existuje vztažná soustava taková, že krychličkový vesmír vypadá tak, jak jsme jej na začátku vytvořili, bez ohledu na to, jak se jeví pohybujícím se pozorovatelům.

⁷ Pozn. red.: Na to nejsme schopni kvalifikovaně odpovědět. Trvale však žádné záření nevznikne, protože platí zákon zachování energie, a kvantové fluktuační pravděpodobně pozorovateli s jeho problémem nijak nepomohou.

⁸ Pozn. red.: Pokud – společně s autorem – uvažujeme möbiovské stěny, které převrací středově, potom se o střed této stěny ani o její vrcholy pozorovatel při průchodu nerozřízne. Co myslíte, mohou se však objevit hrany, nebo vrcholy, které pozorovatele po průchodu rozříznou, pokud přidáme möbiovské stěny, které převrací podél osy jedné ze stran? Mj. se stále lze (i v autorem uvažovaném případě) rozříznout o okraj „neukotvené“ nepropojené stěny. :-)

ohromná koule marmelády ...). Protože v tunelu je jich za sebou nekonečně mnoho, působí na sebe gravitační silou, jejíž směr je kolmý na postupné směry krychle. Následkem toho se po umístění tělesa (třeba Slunce) do takového tunelu toto těleso začne prodlužovat ve směru kolmém na postupné stěny a zužovat ve směrech na tento kolmých, než se z něj stane válec spojující obě postupné stěny. Jaká je síla, která toto způsobí? Je to součet všech hodnot gravitačních sil, jimiž na těleso působí jeho obrazy o stejné hmotnosti m a vzdálenostech $a, 2a, 3a, \dots$, kde a je strana krychle. Matematicky vyjádřeno:

$$F_g = \kappa \frac{m^2}{a^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Toto číslo se blíží $1,65\kappa m^2/a^2$ (nechal jsem počítač nakreslit graf, a ten vypadal celkem konvergentně navzdory tomu, co tvrdila chytrá knížka).⁹ Takže i ze Zeměkoule by se v takovéto krychli o straně kolem $15 \cdot 10^3$ km stal Zeměválec.

Krychle druhá – zrcadlo. Krychli „zrcadlo“ dostaneme sjednocením jedné nebo více stěn klasicky se sebou samými. Sjednocené stěny pak mají vlastnosti zrcadla. Pozorovatel, stejně jako by chtěl projít zrcadlem, při pokusu projít touto stěnou narazí. Ovšem ne do skla, ale sám do sebe.¹⁰

Krychle třetí – zesilovač. Tato krychle má některou stěnu möbiovsky sjednocenou se sebou samotnou. Na tomto sjednocení je odpuzující jedna vlastnost: Pokud bydlíte v jednom rohu möbiovské stěny a máte nepřítele v rohu protějším, může se vám kdykoliv za cokoliv pomstít tím, že k vašemu domu přistaví výkonný reproduktor, který je přes zesilovač spojený s mikrofonem, který na druhém konci möbiovské stěny připevní sobě na dům nebo na plot, a tím vyvolá zpětnou reakci, a reproduktor před vaším domem začne hlasitě pískat. Má to jen jeden



⁹ Pozn. red.: Dokonce se dá ukázat, že v tomto případě

$$F_g = \kappa \frac{m^2}{a^2} \frac{\pi^2}{6}$$

ve skutečnosti však musíme dát dobrý pozor na to, co toto číslo vlastně znamená – v „tunelovém“ zapojení žádný bodový objekt nepůsobí sám na sebe. Jeho obrazy na něj sice působí touto silou, ale z obou stran přesně stejně, takže bodový objekt na sebe žádnou silou nepůsobí (tedy se zachovává i energie). Ale všechny gravitační síly od ostatních obrazů jsou přenášeny konstantou $\pi^2/6$.

¹⁰ Pozn. red.: Povšimněte si, že v této krychli již na sebe bod působí nenulovou gravitační silou směrem k zrcadlu. Spočítáte, jak velká tato síla je?

háček – že to váš nepřítel uslyší také, protože k němu zvuk nebude putovat celých $\sqrt{2}a$ (a je délka strany krychle), ale přímo přes möbiovskou stěnu. I tak je to velice zajímavá krychle . . .

Ale vraťme se k hrátkám se Zemí a gravitací. Opravdu je jenom náhoda, že je to Zeměkoule, kromě Zeměválece z minulého příkladu to také dost dobře mohla být úžasná Zeměplocha. Jenom by se dost dobře nemohla otáčet, kdyby ve vesmíru tvaru krychle se všemi stěnami kromě dvou, jež jsou proti sobě, sjednocenými tak, že protější stěny jsou sjednoceny navzájem, byla ze všech světových stran obroubená sama sebou. Jaká síla by ji vlastně formovala do tohoto tvaru? Byla by roztahována do všech světových stran, jež se všechny dají rozložit na součet sil ze čtyř základních směrů. Protože je hmota rozložena symetricky podle svislé osy, jsou i čtyři roztahovací síly symetrické, čili sobě rovné. Každá z nich má velikost rovnou velikosti gravitační síly veškeré hmoty v našem prostoru, která je od libovolné krychle ve směru sever (včetně) až východ (vyjma). Tato síla je součet všech sil

$$F_g = \kappa \frac{m^2}{a^2} \left(\frac{1}{v^2 + s^2} \right),$$

kde s je vzdálenost severním a v východním směrem a s tedy narůstá od 0 do ∞ a v při každém s od 0 do ∞ . Počítač spočítá, že se velikost této síly blíží cca $F_g = 18m^2/a^2$.¹¹

Bystrému čtenáři je již jasné, že by Země v jiném vesmíru mohla nabýt dalších podob. My se ještě zaměříme na vesmír, kde by byla vlastní gravitací rozmetána v (částicový) prach. Ano, je to krychle se třemi dvojicemi sjednocených stěn, které jsou naproti sobě. Intenzita gravitačního pole by zde byla nekonečná.¹²

Irigi

¹¹ Pozn. red.: Daný vzorec zde bohužel správný není – v tomto případě by bylo potřeba nahlížet na „Zeměplochu“ jako na nekonečnou rovinu s danou plošnou hustotou a počítat její gravitační pole ze vzorce

$$F_g = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{m\rho(x,y)}{x^2 + y^2} dx dy.$$

Tento integrál však vůbec není zapotřebí, protože je zřejmé, že (díky symetrii) se všechny síly kolmé na osu „Zeměplochy“ navzájem zruší. To platí jak pro gravitaci celé desky, tak pro síly, kterými na sebe působí bod sám prostřednictvím svých obrazů. Zajímavým důsledkem ale je, že pokud žijete na této „Zeměploše“, pak na vás působí konečné gravitační pole, které směrem do výšky neklesá.

¹² Pozn. red.: V dílčích výsledcích se zdá, že gravitační působení je nekonečné, protože v takto uzavřeném vesmíru je „nekonečně mnoho“ hmoty, ve skutečnosti však tato hmota má i určitou symetrii danou uspořádáním do krychlíček,

Téma 2 – Logik

Nyní bych vás rád seznámil s tím, jak téma Logik zpracovali naši bystří řešitelé.

Jedno z prvních pěkných řešení nám poslal Doc.^M Honza Musílek. Princip jeho metody záměrně uvádíme až nyní s větším časovým zpožděním, protože jsme chtěli, aby i ostatní řešitelé měli možnost sami přijít na tuto zajímavou metodu.

Strategie Doc.^M Honzy Musílka spočívá v tom, že první tip zvolím náhodně. Pak každý další tip vždy náhodně zvolíme ze zbývajících možností správného řešení. Tak dostaneme následující obecný algoritmus:

1. Napiš na list papíru všechny možné variace. Vznikne seznam.
2. Zvol náhodný tip ze seznamu a nech si ho ohodnotit. Pokud ses střelil ve všech kolíčcích, jdi na krok 5.
3. Škrtni všechny doposud neškrtnuté variace v seznamu, které nevyhovují ohodnocení. To jsou takové variace, u kterých je z ohodnocení jisté, že nemohou být správným řešením.
4. Jdi na krok 2.
5. Vyhral jsi – určil jsi správné řešení.

Honza píše: „Tento postup je pro člověka prakticky použitelný, pokud všech možných variací není moc. Psát dlouhé seznamy variací není pro člověka reálné, ale pro počítač je to hračka.“ Já si však myslím, že pro velké vstupy by měl problémy i počítač.

Vylepšení výše uvedené metody nám poslal Mgr.^M Jakub Opršal. Ten se snaží místo náhodného tahu vybrat takový tah, který je z určitého hlediska nejvýhodnější.

Jakub si také vytváří seznam všech možných variací, ze kterého podle dotazů vyškrtává nemožná rozmístění. Každou možnost ze seznamu nejdříve ocení číslem, které reprezentuje vhodnost takového dotazu. Při výpočtu číselného ocenění uvažuje ke každé možnosti ze seznamu všechny potenciační výsledky ohodnocení kolíčky při tomto dotazu. Pro každý z možných výsledků ohodnocení kolíčky si vypočítá, jak velký by byl nový seznam možných variací po vyškrtání nemožných rozmístění vzhledem k odpovědi.

Ocenění možnosti rozmístění je pak rovno maximu z velikosti seznamů. Po ocenění všech prvků z původního seznamu všech rozmístění se dotáže na takovou možnost, která má ocenění ze všech nejmenší. Podle výsledku dotazu

takže se gravitační síly navzájem téměř (až na malý konečný zbytek) odečítají. Důsledkem je, že gravitace (bereme-li ji newtonovsky), která na nějaký objekt působí, je vždy konečná. Výpočet, který to ukazuje, je skutečně velmi komplikovaný. (Každý hmotný bod nahradíme trojrozměrnou mřížkou jeho obrazů – jde o vrcholy krychlí o straně a – a počítáme gravitační působení na jiný bod někde uprostřed této mřížky.) Autor má však pravdu v tom, že v popsanych třech krychličkových vesmírech jsou stabilními uskupeními válec, rovina a hmota rozložená v celém objemu – prach.

vyškrtá stejně jako Honza nemožná rozmístění a celý postup provádí stále znova, dokud správné rozmístění neuhodne.

Zajímavé řešení nám poslal i Dr.^{MM} Franta Konopecký, který se snaží vylepšit algoritmus Mgr.^{MM} Míši Takácese.

Pro připomenutí uvádím zkrácený algoritmus Michala: Budem používat iba červené a zelené farby kolíkov. Najprv zafarbím všetky políčka na zeleno. Teraz urobíme taký ťah, že prvé políčko zafarbíme na červeno (dáme červený kolík) a na zvyšné dáme zelené kolíky. Môžeme dostať 2 druhy informácií.

1. Čiernych kolíkov pribudne. \Rightarrow Na prvom políčku je červený kolík.
2. Čiernych kolíkov ubudne. \Rightarrow Na prvom políčku je zelený kolík.

Takýmto spôsobom môžeme preskúšať aj zvyšných $n - 1$ políčok. Takto uhádneme kód po najviac $n + 1$ ťahoch.

Řešení Dr.^{MM} Franty Konopeckého

Uvažujme algoritmus pro 2 barvy – červenou a zelenou. Pro zjištění počtu červených a zelených kolíčků dává Míšo v prvním tahu všechny kolíčky zelené. To však není nutné. Tento tah lze v postupu vynechat. Počty červených a zelených kolíčků se můžeme dozvědět i z dalších tahů.

Začneme tím, že si do řady postavíme jednu červenou a zbytek zelených kolíčků. Pro tento případ platí, že počet správně umístěných + počet nesprávně umístěných $- 1$ udává celkový počet zelených kolíků, což platí až na případ, kdy je $n - 1$ kolíků umístěných správně (to jsou všechny kolíky zelené).

Zdůvodní se to tak, že všechny správně umístěné zelené jsou započítány v počtu správně umístěných a jediná zelená, která by mohla být špatně umístěná, je ta, co není na místě naší jedné červené. To znamená, že pokud červená je na správném místě, je počet nesprávně umístěných roven nule, a z počtu správně umístěných musíme právě jednu červenou odečíst. Pokud je naopak červená na nesprávném místě, tak je spolu s jednou zelenou započítána v počtu nesprávně umístěných, a tak ji při počítání všech zelených musíme zase ze součtu počtu správně umístěných a počtu nesprávně umístěných odečíst.

Tím je algoritmus Míši zkrácen o jeden tah na n tahů. Lze jej zkrátit ještě o jeden tah tím, že pokud jsme již určili $n - 1$ pozic (na což potřebujeme nejvíce $n - 1$ tahů), tak není problém dopočítat barvu posledního kolíku. Takto umíme zjistit pozici všech kolíků na $n - 1$ tahů, a v dalším tahu už můžeme hru zakončit uhodnutím správného řešení.

Pro některé případy lze hru výrazně urychlit. Pokud zjistíme, že hledáme jen jeden kolík, tak se vyplatí použít metodu půlení intervalů. Obarvíme polovinu kolíčků na červeno, druhou polovinu na zeleno, a podle výsledku určíme, jestli se náš kolík nacházel někde v červené skupině nebo v zelené. A pak stejný postup zopakujeme s touto podskupinou. Této metody by se dalo využít i pro více hledaných kolíčků.

Na závěr přidávám několik postřehů pro $k > 2$. Opět je první strategií, která člověka napadne, zjistit jednotlivé počty barev u kolíků, a pak je podle toho

hledat. Počty zjistíme nejhůře na $k - 1$ tahů. (Vyzkoušíme $k - 1$ rozestavení kolíků o stejných barvách. Pro zbylou barvu počet dopočítáme.)

V dalším postupu pak zkusíme už na jednotlivých políčkách všechny možné barvy, dokud nám počet černých kolíků nevzroste, což znamená, že jsme se trefili. Celkově dává tento postup $(n + 1)(k - 1)$ tahů. (Zjištění počtu barev trvá $k - 1$ tahů, zjištění správné barvy pro jedno políčko trvá $k - 1$ tahů, políček je n .)

Tento algoritmus lze ovšem velmi rychle vylepšit. Není nutné zjišťovat početní zastoupení barev, nebo alespoň dopočítat barvu posledního kolíčku, pokud známe barvy $n - 1$ předchozích kolíčků a početní zastoupení všech barev.

Tím se dostáváme k počtu tahů $n(k - 1)$. (Ušetřili jsme $k - 1$ tahů na zjišťování počtu barev, nebo na zjišťování barvy posledního kolíčku.)

Jirka D.

Téma 4 – Střílečka

Pozn. red.: Zde přinášíme výsledky slibovaného Střílečkového turnaje. Celkem nám přišly čtyři programy a poměrně hodně algoritmů. Ty z nich, které byly dostatečně jednoznačné, aby se daly zapsat přímo jako program, jsme přepsali jako programy a zařadili do turnaje. V případě některých příspěvků šlo bohužel spíše než o algoritmy o rozbor obecné strategie, na základě kterého program napsat nešel. Takové příspěvky jsme samozřejmě bodově ohodnotili, ale do turnaje zařazeny nebyly.

Přepis jednodušších algoritmů

Dr.^{MM} Franta Konopečký zaslal algoritmus stále opakující sekvenci

$$(N, K, K, S, K, K),$$

Bc.^{MM} Marek Pecha zaslal algoritmus, který opakuje sekvenci

$$(K, N, K, N, K, N, K, N, K, N, S, S, S, S, S).$$

Střelba se vždy provádí na náhodného soupeře.

Mgr.^{MM} Veronika Bachratá poslala algoritmus dodržující následující body:

1. Nabíjím.
2. Pětkrát se kryji.
3. Střílím po hráči s maximálním počtem krytů. V případě rovnosti s maximálním počtem nábojů a v případě rovnosti vybírám náhodně.
4. Postup opakuji.

Algoritmus Mgr.^{MM} Radima Pechala v každém kole oboduje akce krytí, obranu a střelbu po řadě podle následujících vzorců (jsou-li uvedeny náboje nebo kryty

soupeře, sčítá se přes všechny soupeře):

$$\begin{aligned} \text{krytí} &= 10 - (\text{počet po sobě jdoucích bránění})^2 + \text{random}, \\ \text{obrana} &= \frac{13}{(\text{počet nábojů, které mám})} + 5 \cdot \text{random}, \\ \text{střelba} &= (\text{počet nabití protihráče})^4 + (5 - (\text{počet nábojů protihráče}))^2 \cdot \\ &\quad \text{sgn}(5 - (\text{počet nábojů protihráče})), \end{aligned}$$

kde „random“ je náhodné reálné číslo z intervalu $(0, 1)$. Akce s maximální hodnotou je následně provedena. Složitější algoritmy neuvádíme pro jejich složitost. :-)

Hodnocení

Bodové hodnocení turnaje je mírně komplikovanější než u běžných témat, proto jej pro průhlednost objasníme: Za došlý funkční program jsme udělovali automaticky 4 body neohledě na výsledek turnaje a zbytek příspěvku jsme hodnotili jako klasický příspěvek do kteréhokoli jiného tématka (tj. v rozmezí 0–20 bodů). Samotný turnaj byl hodnocen ve dvou kategoriích:

- průměrné pořadí v dané hře (sestupně) a
- počet zabitých protihráčů (vzestupně).

Možná se pozastavíte nad tím, proč jsme v první kategorii nepoužili prostě počet her, kdy byl program první. Jednoduše proto, že ve valné většině her se hráči dělili o druhé místo (pokud n programů zůstalo ve hře až do vypršení limitu 1000 kol, aniž by se zabilo, bylo jim všem přiděleno pořadí n), a tím bychom zcela opomněli programy, které sice velmi často zůstávaly na druhém místě a – byť nedokázaly své soupeře v posledním kole zabít – byly v přežití i tak velmi úspěšné. Každá kategorie byla bodována stejně: první místo 8 bodů, druhé místo 4 body, třetí místo 2 body a čtvrté místo 1 bod. Zdá-li se vám to málo, uvědomte si, že k číslu se ještě připočítávají body za samotný příspěvek, resp. program.

Průměrné pořadí a počet zabitých protihráčů:

Jméno	Poř.	Body	Počet	Body
Mgr. ^{MM} Veronika Bachratá	2,53	8	13054	4
Bc. ^{MM} Marek Pecha	2,60	4	7942	2
Dr. ^{MM} Peter Perešíni	3,02	2	18974	8
Dr. ^{MM} Franta Konopecký	3,66	1	5390	1
Mgr. ^{MM} Radim Pechal	4,43	0	5067	0

Jako zajímavost ještě uvedme, že program:

- Dr.^{MM} Franty Konopeckého zabil program
 - Dr.^{MM} Petera Perešíniho 2828krát a
 - Mgr.^{MM} Radima Pechala 2562krát;

- Mgr.^{MM} Veroniky Bachraté zabil programy
 - Dr.^{MM} Franty Konopeckého 9342krát,
 - Bc.^{MM} Marka Pechy 2658krát,
 - Dr.^{MM} Petera Perešíniho 1031krát a
 - Mgr.^{MM} Radima Pechala 23krát;
- Bc.^{MM} Marka Pechy zabil programy
 - Dr.^{MM} Petera Perešíniho 4904krát,
 - Mgr.^{MM} Veroniky Bachraté 2226krát a
 - Mgr.^{MM} Radima Pechala 812krát;
- Mgr.^{MM} Radima Pechala zabil programy
 - Bc.^{MM} Marka Pechy 2045krát,
 - Mgr.^{MM} Veroniky Bachraté 1305krát,
 - Dr.^{MM} Petera Perešíniho 1059krát a
 - Dr.^{MM} Franty Konopeckého 658krát;
- Dr.^{MM} Petera Perešíniho zabil programy
 - Mgr.^{MM} Radima Pechala 8625krát,
 - Mgr.^{MM} Veroniky Bachraté 5337krát,
 - Bc.^{MM} Marka Pechy 4804 a
 - Dr.^{MM} Franty Konopeckého 208krát.

Irigi

Téma 5 – Sluneční plachetnice

Na tuto tému prišlo niekoľko riešení. Niektorí riešitelia štúdiom literatúry získali zaujímavé poznatky, bohužiaľ vo svojich príspevkoch neuviedli literatúru, z ktorej čerpali. Toto je závažná chyba, ktorá sa premietla do udeľovania bodov – človek musí odkazovať na zdroje, z ktorých čerpal. Inak môže práca vyzerat tak, že to človek všetko sám vymyslel, a popripade byť obvinený z plagiátorstva či krádeže myšlienok.

Sluneční plachetnice

Dr.^{MM} Karla Procházková

Trochu historie a sci-fi

První opravdový autor sci-fi byl Jules Verne, který ve své knize *Ze Země na Měsíc* již v roce 1865 popisuje příběh Michaela Ardana, který tvrdí, že projektil vystřelený do vesmíru nikdy nepřekročí rychlost 9 900 km/h, ale na druhou stranu se táže, zda-li není zřejmé, že tato rychlost bude jednou překonána mnohem většími rychlostmi, které budou založeny na pohonu světelném nebo elektrickém. James Clerk Maxwell poté skutečně zjistil, že světlo skutečně vytváří tlak na povrch. Bohužel Verne v rozvíjení svých myšlenek nepokračoval a ani jeho následovatelé nepokročili o mnoho dále.

Ale 60 let po Verneovi se dva muži nechali inspirovat a snažili se vylepšit myšlenku slunečních plachetnic. Byl to ruský průkopník Konstantin Ciolkovskij a jeho litevský žák Fridrich Cander. Jejich studie o slunečním plachtění však nebyly příliš propracované a jejich hlavní přínos byl spíše v návrhu raket poháněných kapalinou.

V květnu 1951 vychází v jednom z hlavních sci-fi časopisů *Astounding Science Fiction* podrobný článek o tom, jak by sluneční plachetnice mohly být smontovány na oběžné dráze a poté využity k vesmírnému cestování. Autor Carl Wiley napsal tento článek pro jistotu dokonce pod pseudonymem, aby ho náhodou vědecké kruhy nezavrhl. Po sedmi letech se objevuje další vědecký článek v časopise *Jet Propulsion*. V šedesátých letech se spolu s technikou rozvíjí i sci-fi literatura, a tak byl skutečně Wileyův článek mnoha spisovatelů použit v jejich knihách.

V dubnu 1960 píše Cordwainer Smith svou povídku *The Lady Who Sailed The Soul*, kde je hlavní hrdinka první pilotkou sluneční plachetnice. Další spisovatel Pierre Boulle vydává v roce 1963 *Planetu opic*, ve které se objevuje vesmírná plachetnice poháněná světlem. Čtyři roky po vydání *The Lady Who Sailed The Soul* píše Arthur C. Clarke první povídku o slunečním plachtění (*Sunjammer*), ve které se odehrává již zmíněný závod ze Země na Měsíc mezi slunečními plachetnicemi. Dalším spisovatelem, kterého sem můžeme zařadit, je Poul Anderson, který měsíc po Clarkovi publikuje příběh pod stejným názvem *Sunjammer*, ve kterém se stejně jako Clarke věnuje technickým detailům svých „vlečných lodí“.

Nebyla to už pouze sci-fi literatura, která se zabývala slunečním plachtěním. Začaly se objevovat i vědecké články. Postupem času bylo o tomto tématu napsáno tolik knih, že A. Clarke s D. Brinem dokonce vydali celou knihu o fikci a faktech o slunečním plachtění – *Project Solar Sail*. V dnešní době se již sluneční plachetnice konstruuje a bude brzy vypuštěna.

Pohon

Pozn. red.: Zavedme si pojem sluneční vítr. Je to tok částic ze Slnka smerom do medzihviezdneho priestoru. Skladá sa z niekoľkých zložiek, pričom podstatné sú fotóny (čiže svetlo), protóny a elektróny. Ďalej budeme pod pojmom sluneční vítr rozumieť iba toku fotónov, keďže zvyšné zložky majú oveľa menšie energie.

K pohonu sluneční plachetnice je vhodnější použít sluneční světlo než sluneční vítr. Ve vzdálenosti Země od Slunce je zářivost slunečního světla zhruba $1,4 \text{ kW/m}^2$. Když však vydělíme $1,4 \text{ kW/m}^2$ rychlostí světla, tak dostaneme skutečně velmi malou sílu. Takové čtvercové zrcadlo o straně 1 kilometr by bylo poháněno silou pouze 9 N (dnešní motor pohání raketoplán silou asi 1,8 MN při startu, výkon téměř 7 GW). Ale i tak nepatrná síla, když do vás neustále tlačí, vás může rozjet na docela velké otáčky. Má to ještě jednu výhodu – toto palivo se nevyčerpává. Má to také malý problém. Když se budete příliš vzdalovat od Slunce, tak vám sluneční pohon rychle dojde, protože sluneční zářivost klesá velmi rychle.

Je nutné mít velmi tenkou (v dnešní době jsou vyvíjena uhlíková vlákna o tloušťce několik mikronů, které dokáží přežít žár ze Slunce, když zachycují jeho energii) a velkou plachtu, abychom získali co největší rychlost.

Plachta

Jak už jsme napsali, je nutné použít velmi tenkou a rozlehlou plachtu s vysokou odrazivostí, která nebude poškozena ani velkým žářem v blízkosti Slunce. K tomu se velmi dobře hodí lehká a tenká uhlíková vlákna. Například stříbro by se také velmi dobře hodilo, ale bohužel je příliš drahé a snadno podléhá oxidaci. Hliník je naopak velmi levný a dosáhneme s ním odrazivosti až 88 %, a tak by tenké fólie z hliníku bylo možné použít.

Snad by stačilo na lehký plast pouze nastříkat například hliník sprejem, aby nebyla plachta příliš těžká. Plastický film v dnešní době může mít tloušťku pouze 8 mikronů, a používá se v polovodičích a elektronických zařízeních. Vhodné je použít uhlíková vlákna, ze kterých by snad časem bylo možné vytvořit i vláknovou síť o tloušťce až 0,1 mikronu. Hliník by pak mohl být napařován tak, aby se mezi vlákny vytvořila tenoučká odrazivá vrstvička. Stejně jako u dalekohledů by snad mohla být použita technika mozaiky – poskládat z kousíčků celé obří zrcadlo. Na každém z kousků by pak bylo jednodušší udržet rovný povrch a při poškození by byl poškozen pouze jeden segment.



Vzhled

Sluneční plachetnice může mít plachty v podobě disku a otáčí se pouze vnitřní disk. Zbytek plachet zůstane v klidu. Tento typ nepotřebuje již další stabilizační struktury. Bohužel by se asi velice špatně ovládala a byla by s ní velmi složité manipulace.

Dalším typem je heliogyro – pracuje na podobném principu jako helikoptéra – lopatky zůstávají stále ve stejné rovině, i když velmi rychle rotují a tím udržují celou plachetnici stabilní.

Třetí možnost je čtvercová plachta s trojosým stabilizérem z drátů. Kontrola je zabezpečena lopatkami na sluneční tlak umístěnými na koncích os.

Všechny tyto typy již byly otestovány na oběžné dráze. Roku 1993 Rusové při odletu z Miru použili experimentální sluneční plachetnici s hliníkovým

povrchem (průměr 25 m, rotační rychlost 10 ot./s). V roce 1996 NASA rozvíjela z raketoplánu 14ti metrový anténový disk, který byl však vypuštěn kvůli komunikaci, který otestoval trojosý stabilizér.

Plachetnice a účinnost

Dr.^{MM} Jozef Cmar

Dr.^{MM} Jozef Cmar počítal, že tlak slunečního záření ve vzdálenosti Země je $4,5 \cdot 10^{-6}$ Pa. Dále správně podotkl, že jestliže plachta pouze absorbuje dopadající záření, pak tlak působí silou pouze ve směru dopadajícího záření a plachta nemá možnost příliš manévrovat v prostoru, může pouze měnit velikost působící síly natáčením plachty. Naproti tomu plachta s dokonale odrazivým povrchem má nejvyšší účinnost a umožňuje i manévrování. Směr a velikost síly závisí na velikosti plachty a jejím natočení.¹³ Plachta odražející světlo všemi směry je méně účinná než plachta – zrcadlo.¹⁴ Umožňuje totéž, co plachta s dokonale odrazivým povrchem, ale s nižší účinností.

Aby byla sluneční plachetnice efektivní jako meziplanetární dopravní prostředek, její zrychlení musí být alespoň 1 mm/s^2 . Pro zrychlení nad 1 mm/s^2 efektivita rychle roste.

Na rozdíl od normálních plachetnic nemůže sluneční plachetnice plout proti Slunci. Normální plachetnice se při křížování proti větru „opírá“ kýlem o vodu, ale ve vesmíru se nemá o co opřít.¹⁵

Bzučo

Řešení úloh

Úloha 3.1 – Oblasti

(5b)

Zadání:

Uřčete, jaký je maximální počet oblastí, na které rozdělí rovinu k různoběžných přímk. Kolik oblastí můžeme maximálně získat při dělení (třírozměrného) prostoru k rovinami? Najděte obecný vztah pro n-rozměrný prostor a příslušné nadrovinu?

Řešení:

Nejprve zdůrazním, že objekty jsou v *obecné poloze*, žádné dva tedy nejsou rovnoběžné a žádných $(d + 1)$ se neprotíná v jednom bodě. Úlohu budeme řešit

¹³ Pozn. red.: *Dokážete tieto tvrdenia dokázat? Ako závisí smer a veľkosť sily na natočení plachty a odrazivosti povrchu?*

¹⁴ Pozn. red.: *Dokážete spočítat o kolik?*

¹⁵ Pozn. red.: *Namiesto vody by sa mohla plachetnica opierať o „gravitáciu“ okolných telies. Myslíte si, že je to reálne?*

indukcí podle dimenze d . Nejprve si vyřešíme (celkem triviální) případ pro $d = 1$, tedy pro body dělicí přímku. Počet oblastí je evidentně

$$P_n^1 = n + 1.$$

Nyní pro $d = 2, 3, \dots$ použijí i indukci podle počtu dělicích objektů (dělítek) n . Pro $n = 0$ je oblast vždy jen jediná, přidáním dalšího $(d-1)$ -rozměrného dělítko rozdělím na dvě všechny oblasti, které dělítko protnulo, přibude mi tedy právě tolik oblastí. Kolik oblastí to ale je?

Zajímá mě průnik $(d-1)$ -rozměrného dělítko s $(n-1)$ dělítky již umístěnými. V tomto řezu vzniknou nějaké $(d-1)$ -rozměrné oblasti, každá z nich je hranicí mezi dvěma d -rozměrnými oblastmi, které byly předtím jedinou. Počet oblastí v $(d-1)$ -rozměrném prostoru rozděleném $(n-1)$ $(d-2)$ -rozměrnými dělítky už ale řešit umím (z indukce), rekurzivní vzorec je tedy

$$\begin{aligned} P_n^d &= P_{n-1}^d + P_{n-1}^{d-1}, \\ P_0^d &= 1. \end{aligned}$$

Mohl bych si dodefinovat, že

$$P_n^0 = 1,$$

ale mluvit o dělení bezrozměrného prostoru nemá moc smysl.

Pro $d = 2$ stačí v předcházejícím textu nahradit d -rozměrnou oblast rovinou, $(d-1)$ -rozměrné dělítko přímkou, a uvědomit si, že přidáním n -té přímky protnu $(n-1)$ -oblastí, které rozdujím.

$$\begin{aligned} P_n^2 &= P_{n-1}^2 + P_{n-1}^1 = \\ &= P_{n-1}^2 + n = 1 + 1 + 2 + 3 + \dots + (n-1) + n, \end{aligned}$$

což je součet aritmetické posloupnosti:

$$P_n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + 1 = \frac{n^2 + n + 2}{2}.$$

Výsledek bude vždy polynom stupně d , to ale dokazovat nebudu (kdo má zájem, ozvěte se :-)). Navíc $P_i^d = 2^i$ pro $i \in \{0, \dots, d\}$ (celkem zřejmé, zájemci viz výše), z čehož snadno určíte koeficienty hledaného polynomu.

Gavento

Úloha 3.2 – Čočky (6b)

Zadání:

Vymyslete měření, pomocí kterého dokážete zjistit, je-li neznámá čočka (například z brýlí) spojka, nebo rozptylka a jakou má optickou mohutnost (resp. ohmiskovou vzdálenost). Určete (odhadněte) přesnost, s jakou jste touto metodou schopni optickou mohutnost určit. Zkuste vaši metodu prakticky ověřit.

Postup, který vymyslíte by měl být co nejjednodušší (pokud možno bez použití vybavení, které není běžně dostupné), ale zároveň dostatečně přesný. Zkuste najít rozumný kompromis mezi těmito požadavky.

Řešení:

V souladu s požadavky na jednoduchost metody provedu hned zpočátku jedno zanedbání. Budu zkoumanou čočku považovat za tenkou.

Vzhledem k tomu, že v geometrické optice je notorický chaos ve znaménkách, nadefinuji zde konvenci, kterou budu dále používat v celém řešení. Předmětové vzdálenosti (typicky vzdálenost předmětu) budou kladné ve směru od čočky k předmětu. Obrazové vzdálenosti (poloha obrazu apod.) budou naopak směrem k předmětu záporné. Optická mohutnost spojky je kladná a rozptylky záporná. Velikost předmětů i obrazů je kladná směrem „nahoru“ a záporná směrem „dolů“. Zvětšení je kladné tehdy, když nedojde k převrácení obrazu.

S ohledem na předchozí odstavec pak mohu napsat několik důležitých rovnic (plynou z triviálních geometrických úvah, anebo si je můžete ověřit v učebnici fyziky). Přitom a , resp. a' je poloha předmětu, resp. obrazu, y , resp. y' velikost předmětu, resp. obrazu, Z zvětšení a f ohnisková vzdálenost.

$$Z = \frac{y'}{y} = -\frac{a'}{a}, \quad (\text{r3.2.1})$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}. \quad (\text{r3.2.2})$$

Pomocí těchto rovnic mohu napsat vztah pro zvětšení

$$Z = \frac{1}{1 - a/f}. \quad (\text{r3.2.3})$$

Poloha předmětu a je vždy kladná ($a \in (0; \infty)$), takže pro rozptylku bude jmenovatel vždy větší než jedna a celkové zvětšení kladné a menší než jedna. Pro spojku bude hodnota jmenovatele v intervalu $(-\infty; 1)$ a zvětšení tedy bude buď záporné, nebo kladné a větší než jedna. Z toho už je vidět jeden jednoduchý způsob, jak rozlišit spojku a rozptylku. Stačí se skrz čočku podívat. Pokud uvidím okolí zmenšené, ale přímé, jedná se o rozptylku. V ostatních případech jde o spojku.

Pokud je k dispozici vhodný jasný a kontrastní předmět (sluníčko, obrys budovy proti obloze, žárovka apod.), mohu také využít toho, že rozptylka nikdy netvoří skutečný obraz. Pokud se mi tedy podaří čočkou zobrazit nějaký objekt např. na list papíru, jde o spojku. V opačném případě může jít buďto o rozptylku, nebo o spojku, která má příliš velkou ohniskovou vzdálenost (a tak daleko jsem obraz hledat nezkoušel).

Rozeznat čočky s velkou ohniskovou vzdáleností je obecně problematické, protože velmi málo ovlivňují chod paprsků. Nicméně metoda využívající zvětšení je pravděpodobně použitelnější. Brýlová skla „slabých“ brýlí mohou mít ohniskovou vzdálenost i přes metr, ale i tak lze stále poznat, jestli je obraz zmenšený, nebo zvětšený.

Měřit konkrétní ohniskovou vzdálenost se dá několika způsoby. Dost řešitelů navrhovalo zjistit vzdálenost obrazu. Tato metoda je pro spojky (ale jen pro ně!) skutečně použitelná, ale otázkou je její přesnost. Z rovnice (r3.2.2) je vidět, že vzdálenost obrazu se bude rovnat ohniskové vzdálenosti pouze v případě, že je předmět v nekonečné vzdálenosti. To dost dobře platí například o sluníčku, ale zkuste si sami, jak těžko se hledá přesná poloha čočky, při které je obraz ostrý. Z tohoto hlediska je lepší zobrazovat nějaký více členitý předmět – například obrysy domů, stolní lampičku, ... Pak je ale třeba zkorigovat výsledek podle vzdálenosti předmětu.

Pokud ale lze vzdálenost zobrazovaného předmětu rozumně určit, je tato metoda dobře použitelná. Pokud je $a \gg a'$, je výsledná chyba dána prakticky jen chybou určení vzdálenosti obrazu. Ta bude s jednoduchými prostředky pravděpodobně několik procent (vzdálenost obrazu je řádově desítky centimetrů, nepřesnost určení ostrého obrazu a měření vzdálenosti několik milimetrů). Za pomoci rovné desky, budovy za oknem (vzdálené přibližně 50 metrů), pravítka a trojúhelníku (kvůli podepření pravítka, aby bylo kolmé k desce) jsem zkusil takto proměřit čočku s udávanou ohniskovou vzdáleností 15 cm. Vzdálenost obrazu byla

14,9 mm a chyba (způsobená hlavně nepřesným určením, kdy je obraz opravdu ostrý) asi 2 %. Pro čočku s udávanou ohniskovou vzdáleností 6 cm byla chyba určení vzdálenosti obrazu také asi 2 %. To jsou poměrně slušné výsledky. Čočky s podstatně větší ohniskovou vzdáleností jsem měřit nezkoušel, ale při vhodném provedení měření (a minimálně dvou lidech) by výsledky mohly být obdobně přesné.

Zbývá vyřešit rozptylky a případně také spojky s příliš velkou ohniskovou vzdáleností. Základní myšlenka je vidět v rovnici (r3.2.3). Kromě vzdálenosti předmětu a ohniskové vzdálenosti v ní vystupuje už jen zvětšení. Potřebujeme tedy určit zvětšení (a to pouze pomocí pozorování okem, žádný obraz nikam promítat nemůžeme, chceme přece měřit i rozptylky!). Princip je opět jednoduchý. Vezmeme například linkovaný papír a budeme ho pozorovat zároveň skrz čočku i mimo ni, a pak jen srovnáme hustotu linek. Ale čočky mívají ve zvyku chovat se poblíž okrajů všelijak, jen ne hezky. Takže místo pozorování skrz a kolem čočky jsem zvolil jiný způsob. Malý kousek linkovaného papíru jsem přilepil přímo doprostřed čočky (alternativně tam také lze udělat pár teček fixou). Nadefinuji si úhlové zvětšení Ω jako poměr úhlu, pod kterým vidím předmět za čočkou (a tedy skrz čočku), ku úhlu, pod kterým vidím předmět nalepený na čočce. Pro linkovaný papír bude např. $\Omega = 0,5$ tehdy, když se do jedné linky papírku na čočce zdánlivě vejdu právě dvě linky papíru za čočkou. (Skutečná velikost linek je samozřejmě u obou papírů stejná.)

Pro Ω platí

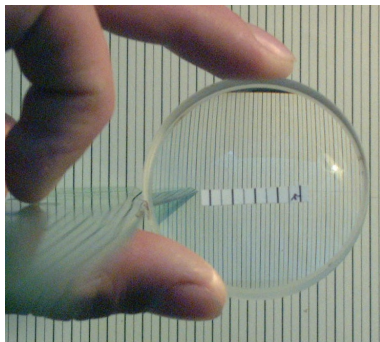
$$\Omega = \frac{y'/(d - a - a')}{y/(d - a)}, \quad (\text{r3.2.4})$$



kde d je kladná vzdálenost předmětu (za čočkou) od oka. (Vzhledem k malým úhlům mohou tangens klidně zanedbat.) Po delších úpravách pak dostanu vztah pro optickou mohutnost:

$$\varphi = \frac{d}{a(d-a)} - \frac{1}{a\Omega} = \frac{1}{a} \left(\frac{1}{1-a/d} - \frac{1}{\Omega} \right). \quad (\text{r3.2.5})$$

Teď již ke konkrétnímu experimentu. Na stůl jsem položil papír s linkami vzdálenými čtvrt centimetru. Stejně linkovanou samolepku jsem nalepil na čočku (viz obr. r3.2.1). Přesně mezi papír a koutek oka jsem postavil čtyřiceticentimetrové pravítko (tím jsem určil $d = (41,2 \pm 0,5)$ cm – nezapomínáme na okraje pravítka). Dál už jen stačilo posouvat čočkou, dokud linky nesplynuly tak, že odpovídaly požadované hodnotě Ω , a pak odečíst její polohu na stupnici pravítka.



Obr. r3.2.1

Při pokusech s rozptylkou o udávané ohniskové vzdálenosti -10 cm jsem hledal $\Omega = 0,5$. Vzdálenost od papíru vyšla $a = (7,7 \pm 0,1)$ mm a optická mohutnost je $\varphi = -(10,0 \pm 0,2)$ D.

Abych změřil i poněkud „šišatější“ čočky, půjčil jsem si na experiment brýle. Při $\Omega = 2/3$ vyšla vzdálenost od papíru $a = (9,8 \pm 0,1)$ cm a výsledná optická mohutnost $\varphi = -(1,91 \pm 0,08)$ D. Bohužel nemám jak ověřit reálnost tohoto výsledku, protože v papíru od brýlí je napsáno, že optická mohutnost je $-1,5$ D plus cylindr $-0,25$ D, z čehož moc moudrý nejsem.

Třetí zkoumanou čočkou byla spojka. V tomto případě bylo $\Omega = 2$ a $a = (7,2 \pm 0,2)$ mm a tedy $\varphi = (9,9 \pm 0,2)$ D.

Kromě variací na výše zmíněné metody se v řešeních se také často objevovaly metody využívající laserových ukazovátek. Jako nejrozzumnější mi připadá použít dvě ukazovátka coby zdroj rovnoběžných paprsků. Pak je možné poměrně jednoduše určovat zvětšení a z něj optickou mohutnost. Otázkou ale zůstává například míra rovnoběžnosti zmíněných paprsků. Každopádně tyto metody potřebují oproti předchozím zmíněným laserové ukazovátko navíc, aniž by nějak podstatně zvýšily přesnost, takže jsou z hlediska jednoduchosti méně výhodné.

Samozřejmě existuje i spousta dalších metod. Těmi se tu už ale zabývat nebudu a raději zmíním několik obecnějších věcí týkajících se (i) této úlohy.

Pokud je u nějakého experimentu potřeba určit chybu, nedělá se to tak, že změříme jeden výsledek, porovnáme jej s tabulkovou hodnotou, a rozdíl prohlásíme za chybu! Pro odhad chyby dokonce ani nestačí provést dvě měření, a prohlásit za chybu jejich rozdíl. Odhad chyby se většinou získává způsobem popsaným níže.

Chybu měření můžeme rozdělit na systematickou a statistickou. Systematická chyba je způsobena tím, že používáme špatnou metodu měření, máme křivé pravítko, nedostatečně přesný voltmetr, ... Velikost této chyby je buďto na přístroji přímo udána, anebo ji musíme odhadnout. Často se bere například půlka nejmenšího dílku stupnice. Statistické chyby vznikají náhodnými vlivy během měření – zafoukal vítr, někdo se prošel kolem aparatury, podívali jsme se z trochu jiného úhlu, ... Tyto chyby mají snahu zkruslovat výsledek náhodně na obě strany, takže teoreticky je můžeme dostatečným počtem měření a zprůměrováním eliminovat. Prakticky se provede určité množství měření (pokud možno alespoň 10), a za chybu se prohlásí rozsah, do kterého se vejde určité procento získaných výsledků. Systematická a statistická chyba se pak spojí dohromady¹⁶ jako celková chyba měření.

Pokud neměříme přímo hledanou hodnotu, ale počítáme ji na základě jiných měření, přenáší se chyby jednotlivých dílčích měření do chyby výsledku. Míra tohoto přenosu je dána velikostí derivace vztahu pro výslednou hodnotu podle každé měřené veličiny. Konkrétně, určíme-li veličinu y pomocí několika dílčích výsledků x_1, x_2, \dots, x_n s odchylkami $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ (určenými podle předchozího odstavce), platí pro celkovou chybu

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial y}{\partial x_i} \right)^2 \sigma_i^2. \quad (\text{r3.2.6})$$

Po zderivování dosazujeme do vztahu (r3.2.6) za x_i průměrné naměřené hodnoty. Jako chybu výsledku uvádíme hodnotu σ z tohoto vztahu.

Základní myšlenka tohoto postupu je v tom, že když je derivace výsledku podle určité měřené veličiny malá, tak na ní výsledek téměř nezávisí, a případná chyba této veličiny jej ovlivňuje jen málo. Analogicky pro velkou hodnotu derivace.

Marble

Úloha 3.3 – Balení dárků (3b)

Zadání:

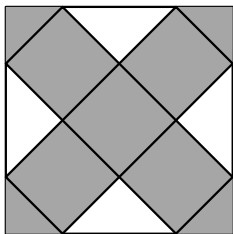
Do jakého nejmenšího papíru ve tvaru čtverce lze zabalit jednotkovou krychli (krychli o straně délky 1), pokud papír nesmíme rozstříhat.

Řešení:

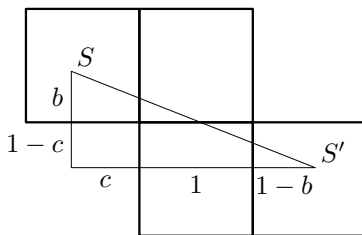
Po chvíli zkoušení zjistíme, že krabici můžeme zabalit do čtvercového papíru o hraně $2\sqrt{2}$. Nákres zabalení je na obrázku r3.3.1.

Nyní dokážeme, že je to nejmenší možný čtverec. Budeme postupovat sporem. Předpokládejme, že krychli můžeme zabalit do čtvercového papíru o straně a kratší než $2\sqrt{2}$. Je celkem jasné, že střed čtverce se bude dotýkat některé stěny, nebo alespoň její hrany. Kdyby tomu tak nebylo, byl by papír

¹⁶ A to podle vztahu $\sigma^2 = \sigma_{\text{syst.}}^2 + \sigma_{\text{stat.}}^2$.



Obr. r3.3.1



Obr. r3.3.2

skrčený přes střed S . Potom by nám ale stačil papír menší, neskrčený ve středu. Nyní tedy vezmeme bod S , kde se papír dotýká stěny krychle, a zobrazíme ho do nejvzdálenějšího místa na krychli pomocí středové souměrnosti. Tento bod označme S' . Aby mohl být S' zakryt papírem, musí do S' dosáhnout alespoň 1 roh čtvercového papíru, což znamená, že musí existovat cesta po plášti krychle z bodu S do bodu S' kratší než $a/\sqrt{2}$ (vzdálenost od středu papíru do jeho rohu). Tato vzdálenost je ale vždy nejméně 2. Přesvědčíme se o tom výpočtem (viz obr. r3.3.2):

$$\begin{aligned} |SS'| &= \sqrt{(b + (1 - c))^2 + (c + 1 + (1 - b))^2} \geq \\ &\geq \sqrt{2} \frac{(b + 1 - c) + (c + 1 + 1 - b)}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} 3 \geq 2. \end{aligned}$$

První nerovnost jsme získali z nerovnosti mezi kvadratickým a aritmetickým průměrem. Jestliže tedy vždy platí, že $a/\sqrt{2} > |SS'|$ a zároveň $|SS'| \geq 2\sqrt{2}$, dostáváme dohromady, že $a \geq 2\sqrt{2}$, a námi nalezený výsledek je nejmenší možný.

Tibor

Úloha 4.1 – Číslování pokojů (5b)

Zadání:

Představte si, že potřebujete očíslovat pokoje na koleji.

Číslo na pokoje píšete tahem štětce přes šablonku. Šablonku změníte tím, že vždy odstraníte první cifru a přidáte nějakou na konec.

Měnění cifer v šablonce je na tom všem samozřejmě to nejnudnější, takže těch výměn chcete udělat co nejméně. Protože jde o kolej plnou matematiků, budou pokoje očíslované ve dvojkové soustavě. Protože je tam i hodně fyziků, mohou být pokoje na chodbách v libovolném pořadí (oni už si nějaké pravidlo vymyslí); a protože jsou tam i informatiči, je třeba před malá čísla napsat správné množství nul (tak, aby měla všechna čísla stejný počet cifer).

Je-li na koleji n pokojů očíslovaných 0 až $(n - 1)$, na kolik změn šablonky to lze celé uskutečnit? Kdy to lze právě $(n - 1)$ přehozeními (což je zřejmě minimum)? Kolik změn je konkrétně potřeba např. pro $n = (300)_{10}$?

Řešení:

Řešení této úločky ukážu s pomocí eulerovských tahů v orientovaných grafech, pro ty co neví co jsou eulerovské tahy snad jen tolik, že jsou to uzavřené sledy

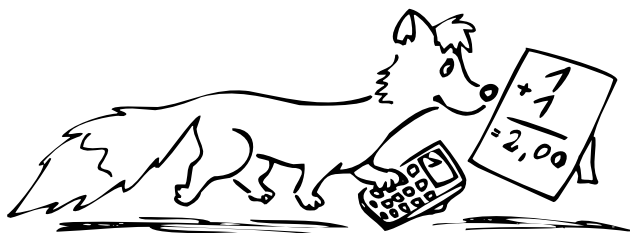
neopakujících se hran, které lze nakreslit jediným uzavřeným tahem. Pro literaturychtivé mohou vřele doporučit studium ze studnice zvoucí se Kapitoly z Diskrétní matematiky.

Postavím si graf, kde vrcholy budou $(k-1)$ tice cifer 0, 1 a hrany budou dvou typů – „0“ a „1“; z vrcholu $[x\mathbf{a}]$ do vrcholu $[\mathbf{a}1]$ povede hrana $[x\mathbf{a}1]$ typu „1“, do vrcholu $[\mathbf{a}0]$ hrana $[x\mathbf{a}0]$ typu „0“. Pohyb v grafu je tedy změna $[m\mathbf{a}]$ na $[\mathbf{a}n]$ odebráním první cifry a přidáním nějaké na konec. Jakýkoli eulerovský tah v takovémto grafu odpovídá nějaké postupné výměně čísel v tabulce přičemž můžeme začít s libovolnou hranou našeho tahu.

Jak dlouhé mohou takové sledy v našem grafu být? Všimněme si, že graf je spojitý (silně) a že vstupní i výstupní stupeň každého vrcholu je právě 2, takže celý tento graf je eulerovský. Pro $n = 2^k$ tedy existuje způsob, jak postupně měnit cifry požadovaným způsobem a nemuset dělat žádnou práci navíc – stačí mi $(n-1)$ výměn, začít mohu kdekoliv. Pro $n \neq 2^k$ bych prostě jen vynechal zbytečné výměny pokud by mi nezáleželo na rozsahu čísel pokojů. (Což mi podle zadání ale záleží.)

V novém grafu, kde budou jen hrany s hodnotami menšími než n , už nemusí (a taky většinou nebude) existovat taková pěkná kružnice. Můžu vlastně odebrat libovolné množství kružnic a jeden tah z „neplatných“ hran. Taková kružnice ale neexistuje, neboť by musela obsahovat alespoň jednu „0“ a ta by se dříve či později během rotací dostala na začátek a toto číslo musí být určité menší než n , nemohu ho tedy vynechat. Nejdelší tah čísel, které začínají na „1“ je tedy $[111 \dots 111] \rightarrow [111 \dots 110] \rightarrow [111 \dots 101] \rightarrow [111 \dots 011] \rightarrow \dots \rightarrow [110 \dots 111] \rightarrow [101 \dots 111]$. To zatím vypadá na $(2^k - k - 1)$ přehození, když $2^k - 2^{k-2} > n > 2^{k-1}$. Pro $n = (300)_{10}$ tedy $k = 9$ a přehození bude nanejvýš $512 - 9 - 1 = 502$. Další zkratky nebudou nejspíše možné, ačkoli nemám exaktní důkaz.

Gavento



Úloha 4.2 – Teploty na pólech (4b)

Zadání:

Na jižním pólu je stanice, na které naměřili průměrnou roční teplotu -48°C . Blízko severního pólu (na $83^\circ 38'$ s. š., $33^\circ 22'$ z. d.) je grónská stanice, kde také měřili průměrnou teplotu, a vyšla jim jen asi -17°C . Proč je mezi těmito hodnotami takový rozdíl, když slunce osvětluje obě místa prakticky stejně?

Průměrné měsíční teploty ve °C jsou:

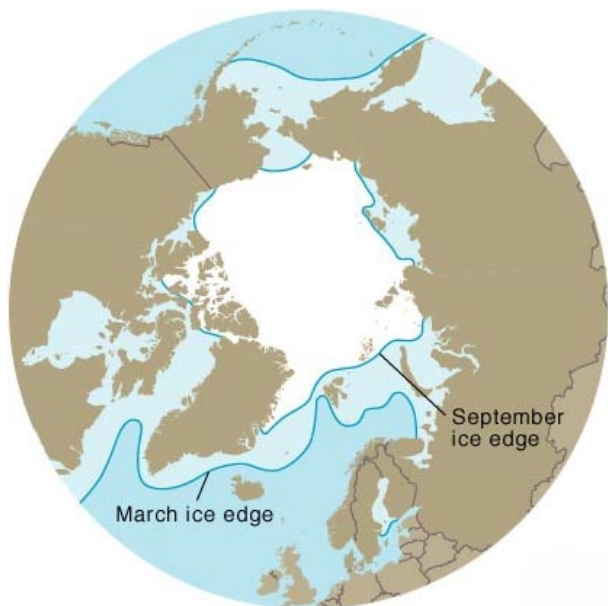
	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
84° s. š.	-31	-32	-31	-23	-11	-1	1	—	-9	-20	-27	-28
90° j. š.	-58	-58	-58	-50	-37	-26	-26	-38	-52	-56	-56	-57

Otázka zní: Proč je průměrná teplota na jižním pólu mnohem nižší než průměrná teplota blízko severního pólu? Prozradíme vám, že občas severní pól rozmrzne úplně a je možné plaviť se v jeho okolí napríklad na kajaku.

Teploty jsou převzaty ze stránek <http://www.weatherbase.com/>.

Řešení:

Hlavným dôvodom, prečo je severný pól teplejší ako južný, je fakt, že pod severným pólom leží oceán, ktorý ho zohrieva. Hrúbka ľadu na severnom póle je najviac niekoľko metrov, a stáva sa, že severný pól rozmrzne úplne. Napríklad ľadoborec Lenin sa na severnom póle kľudne producoval. Myslím, že so mnou budete súhlasiť, že na južnom póle by si toto dovoliť nemohol.



Ďalšími dôvodmi sú napríklad:

- Ako ste správne podotkli, ďalším efektom ovplyvňujúcim teplotu je Golský a Severoatlantický prúd, ktorý zohrieva západnú a severnú Európu. Na obrázku vidíme, ako sa vďaka nemu posúva oblasť zaľadnenia na európskej strane až k osemdesiatej rovnobežke, naopak na ázijskej strane dosahuje Beringovej úžiny. Vďaka tomu, že Labradorský prúd ochladzuje východné pobrežie Severnej Ameriky a Golský prúd naopak obmýva Európu, majú Madrid a New York odlišné podnebia napriek tomu, že majú rovnakú zemepisnú šírku. Severoatlantický prúd zasahuje až do Barentsovho mora. Vďaka tomu je ruský

prístav Murmansk prístupný počas celého roka. Naproti tomu miesto s rovnakou zemepisnou šírkou v Severnej Amerike zodpovedá Baffinovmu ostrovu, ktorý je viac ako polovicu roka obklopený ľadom.

- Stanica v Grónsku je posunutá na juh zhruba o šesť stupňov, čo ale nie je až tak veľa. Slnko navyše v polárnych oblastiach zohrieva predovšetkým vzduch (sneh svetlo veľmi dobre odráža). Vzduch je ale vďaka blízkemu oceánu vlhký, vytvára oblaky, cirkuluje a miesi sa, takže sa znižuje rozdiel teplôt medzi dvoma miestami o rôznej teplote.

Priemerné množstvo slnečného žiarenia, ktoré dopadá na južný pól, je zhruba $1\,200\text{ kW/m}^2$. V polárnych oblastiach Arktídy je dominantným zdrojom podnebia vlhký vzduch z Atlantiku, ktorý zapríčiňuje vznik oblakov, a vďaka tomu dopadá do týchto oblastí priemerne iba 700 kW/m^2 . Samozrejme, tieto čísla musíme vynásobiť výškou Slnka nad obzorom.

- Najnižšiu teplotu na severnej pologuli namerali vo Verchojanskej a Ojmjakonskej kotline, ktorých zemepisná šírka je 63 N ($-79\text{ }^\circ\text{C}$, priemerná teplota v januári $-50\text{ }^\circ\text{C}$). To je zemepisná šírka, akú majú napr. Nórsko, Fínsko, Švédsko alebo Island. Dôvod je ten, že nad Sibírou sa v zime nachádza mohutná studená tlaková výš, ktorá zabraňuje oblačnosti. Vďaka tomu priemerné letné teploty dosahujú až $15\text{--}20\text{ }^\circ\text{C}$, ale zimy naozaj stoja za to. Oblaky síce neprepustia toľko energie zo Slnka na Zem, ale zasa zadržujú teplo, ktoré vyžaruje Zem počas noci.
- Nadmorská výška severného pólu je $0\text{--}5\text{ m n. m.}$, južného 2912 m n. m. . A ako sami viete, so vzrastajúcou nadmorskou výškou klesá teplota.

Niektorí si v zadaní všimli, že na južnej pologuli sú teploty posunuté o šesť mesiacov. Zadanie sme formulovali tak, aby bolo ihneď vidno, že teplota na južnom póle je nižšia ako na severnom. Ono sa vždy nájde dajaký chytrák, ktorý prehlási, že tri mesiace v roku to sedí a zvyšok je chyba merania.

Bzučo

Úloha 4.3 – Irigihho hračka (4b)

Zadání:

Irigi si pro radost koupil novou hračku. Sestává ze dvou kuliček A a B o poloměru r spojených provázekem délky l . Provázek navíc prochází úzkou dírou ve třetí kuličce C tak, že se skrz ni může volně posouvat.

Na začátku je kulička C posunuta tak, že se dotýká kuličky B. Kuličku C Irigi po celou dobu pevně drží, takže se nehýbe. Kuličku A roztočí úhlovou rychlostí ω . Pak začne pomalu tahat za kuličku B a tím zkracuje poloměr kružnice, po které se pohybuje kulička A.

Jakou práci bude muset vykonat, než takto přitáhne kuličku A až do středu otáčení (tedy že se dotkne kuličky C)? Působení tření zanedbejte.

Řešení:

Při řešení úlohy vyjdeme ze zákonů zachování. Naším cílem bude získat vztah, který určuje energii (kinetickou) v závislosti na vzdálenosti rotující kuličky od

osy otáčení. Pak je zřejmě celková vykonaná práce rozdílem kinetických energií v krajních bodech.

Uvědomíme si, že jde o problém, kde působí pouze centrální síly, takže se zachovává moment hybnosti (následující krátký důkaz můžete bez újmy na pochopení úlohy klidně opomenout)¹⁷:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \frac{d}{dt} (\mathbf{r} \times (m\mathbf{v})) = m \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{r} = \\ &= m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{r} = 0 + \frac{d\mathbf{p}}{dt} \times \mathbf{r} = 0 + \mathbf{F} \times \mathbf{r} = 0 + 0. \end{aligned}$$

Pokud se moment hybnosti \mathbf{L} zachovává, potom platí, že je stejný v každých dvou okamžicích. Nyní se budeme zabývat pouze jeho velikostí L , z jejíhož zachování stanovíme velikost rychlosti:

$$L_0 = L_t \quad \Rightarrow \quad mr_0v_0 = mr_tv_t \quad \Rightarrow \quad v_t = \frac{r_0v_0}{r_t}.$$

Zde je potřeba podotknout, že předpokládáme, že rychlost je kolmá na poloměr. To je (pokud s kuličkou pohybuje dostatečně pomalu) splněno. Pro celkovou (tedy pouze kinetickou) energii v čase t platí:

$$E_t = \frac{1}{2}mv_t^2 = \frac{1}{2}m \frac{r_0^2v_0^2}{r_t^2}.$$

Námi vykonaná práce je $W = E_t - \frac{1}{2}mv_0^2$. Snadno tedy nahlédneme, že ať byly r_0 a v_0 na počátku jakékoliv, pokud snížíme poloměr na nulu, výsledná potřebná práce bude nekonečná. Pokud bychom zkracovali provázek jen do vzdálenosti dvojnásobku poloměru, potom by výsledná vykonaná práce byla:

$$W = \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{4r_0^2}{d^2} - 1 \right).$$

Další variantou (kterou uvažovali např. Bc.^{MM} Petr Smital nebo Doc.^{MM} Jan Musílek a za což jsem přiděloval prémiový bod) je nezanedbat objem kuličky, ale počítat její skutečný moment setrvačnosti:

$$W = E_0 - E_t = \frac{1}{2} (J_0\omega_0^2 - J\omega^2).$$

kde pro moment setrvačnosti J platí:

$$J = \frac{2}{5}mr^2 + (l-r)^2m.$$

¹⁷ Součin $\mathbf{v} \times \mathbf{v}$ je zřejmě nulový a součin $\mathbf{F} \times \mathbf{r}$ je nulový, neboť síla, kterou působíme v centrálním poli, je rovnoběžná s \mathbf{r} .

Zákon zachování momentu setrvačnosti uvažujeme ve tvaru

$$J_0\omega_0 = J\omega \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{J_0\omega_0}{J}.$$

Tedy po několika snadných úpravách:

$$W = \frac{1}{2} \omega_0^2 J_0 \left(\frac{J_0}{J} - 1 \right).$$

Zvolené momenty setrvačnosti se v jednotlivých řešeních mírně lišily, vesměs podle toho, jak řešitelé chápali délku lanka l (tj. odkud se měří délka provázku). Rovněž se řešitelé lišili v tom, kam až povolili přiblížení kuliček, než prohlásili, že zde již tření libovolný pohyb zruší, nebo že nejde provázek zkracovat dále, neboť kuličky se již dotýkají. Ve všech takových případech, pokud se nevyskytly další chyby, jsem uděloval plný počet bodů.

Časté chyby a záludnosti: Na první pohled by se mohlo zdát (a mnoho řešitelů takto argumentovalo), že zachovávající se veličinou je energie (protože na první pohled působíme silou kolmou na směr pohybu a tato síla, jak známo, nevykonává práci). Přesto však působíme při zkracování určitou silou po dráze rovné délce provázku. Tedy podle její definice práci konáme. Jak je to možné? (Již odtud je ovšem vidět, že protože práci konáme, energie zachovávající se veličinou být nemůže.)

Problém zmizí, když si uvědomíme, že vektor rychlosti na průvodič ve skutečnosti kolmý není – kulička má určitou nenulovou rychlost, se kterou se pohybuje do středu, úhel vektorů rychlosti a průvodiče tedy svírají úhel menší než 90° . Tvrzení o nevykonávané práci tedy pozbývá platnosti.

Další poměrně častou chybou byl předpoklad, že obvodová rychlost se při pohybu nemění – snadno nahlédneme, že to není pravda – kulička se podle našich předpokladů nebrzdí, takže se směrem ke středu rychlost přímo úměrně zvyšuje.

Jeden z řešitelů při řešení, kdy kuličky považoval za body, prohlásil, že při zkrácení délky provázku na nulu překonáváme nekonečnou odstředivou sílu, tedy je práce nekonečná. Uvědomte si ale, že touto nekonečnou silou působíme na nekonečně malé dráze, příspěvek k energii tedy může být i konečný (to, že je výsledná práce v tomto případě nekonečná, se musí podložit lépe – nejlépe rozborem vztahu pro kinetickou energii při obecném poloměru pro případ $r \rightarrow +\infty$).

Irigi

Výsledková listina za 3. číslo

Poř.	Jméno	Σ_{-1}	Úlohy								Σ_0	Σ_1	
			r1	r2	r3	t1	t2	t3	t4	t5			t6
1.	Dr. ^{MM} Zuzana Safernová	76	3	3	3			12			13	34	60
2.	Mgr. ^{MM} Matěj Korvas	44	4	3	3	16					8	34	44
3.	Doc. ^{MM} Zbyněk Konečný	120	5		3						8	16	43
4.	Dr. ^{MM} Peter Perešíni	86	3								8	11	42
5.	Doc. ^{MM} Jan Musílek	97	5	6	3							14	37
6.	Doc. ^{MM} Tereza Klimošová	126	2		3						8	13	35
7.	Doc. ^{MM} Stanislav Basovník	157	5								11	16	32
8.	Dr. ^{MM} František Konopecký	58	5	2	3		6		3		8	27	31
9.	Mgr. ^{MM} Zdeněk Jaroň	30	5	2	3						12	22	30
10–14.	Doc. ^{MM} Lenka Studničná	135	5		3						4	12	29
	Dr. ^{MM} Eva Černohorská	82	5		3						5	13	29
	Mgr. ^{MM} Michal Hlavatý	29	1	3	2					6		12	29
	Mgr. ^{MM} Jakub Opršal	29	5		3		6				3	17	29
	Mgr. ^{MM} Jan Rygl	29	4	1	3				5			13	29
15.	Mgr. ^{MM} Michal Takács	37	2	2								4	28
16–17.	Mgr. ^{MM} Veronika Bachratá	27	5	1							4	10	27
	Mgr. ^{MM} Tereza Beránková	27											27
18.	Mgr. ^{MM} Radim Vansa	26	4	4	3							11	26
19–20.	Dr. ^{MM} Bedřich Roskovec	49	2	4	3							9	25
	Mgr. ^{MM} Marek Scholz	33	2		2					3		7	25
21.	Mgr. ^{MM} Jaroslav Hančl	24			3							3	24
22.	Mgr. ^{MM} Radim Pechal	23											23
23–25.	Dr. ^{MM} Jindřich Soukup	69			2							2	20
	Mgr. ^{MM} Ondřej Tkáč	37	2	1	3			7				13	20
	Mgr. ^{MM} Ján Pich	20	2		3							5	20
26.	Bc. ^{MM} Mája Kolovratníková	19	3	1	3				4		8	19	19
27.	Mgr. ^{MM} Petra Malá	47			2							2	18
28.	Mgr. ^{MM} Kateřina Böhmová	34	5		3							8	17
29–30.	Mgr. ^{MM} Štěpánka Mohylová	41			2							2	15
	Bc. ^{MM} Vlado Virčík	15											15
31–32.	Dr. ^{MM} Karla Procházková	72			3						5	8	14
	Bc. ^{MM} Petr Smital	14											14
33–35.	Bc. ^{MM} Dárius Gál	13	3	2	3				5			13	13
	Bc. ^{MM} Cyril Hrubíš	13	3		2							5	13
	Bc. ^{MM} Alžběta Pechová	13	2		0						5	7	13

Výsledková listina za 4. číslo

Poř.	Jméno	Σ_{-1}	Úlohy					Σ_0	Σ_1
			r1	r2	r3	t4	t6		
1.	Dr. ^{MM} Zuzana Safernová	80		3	1			4	64
2.	Dr. ^{MM} Peter Perešíni	96				10		10	52
3.	Doc. ^{MM} Jan Musílek	110			5		8	13	50
4.	Doc. ^{MM} Zbyněk Konečný	125	4		1			5	48
5.	Mgr. ^{MM} Matěj Korvas	44							44
6.	Mgr. ^{MM} Veronika Bachratá	39				12		12	39
7.	Doc. ^{MM} Tereza Klimošová	126							35
8–10.	Dr. ^{MM} František Konopecký	60				2		2	33
	Dr. ^{MM} Bedřich Roskovec	57	5	3				8	33
	Mgr. ^{MM} Jakub Opršal	33		2	2			4	33
11.	Doc. ^{MM} Stanislav Basovník	157							32
12–13.	Mgr. ^{MM} Zdeněk Jaroň	30							30
	Mgr. ^{MM} Radim Pechal	30	4	3		0		7	30
14–18.	Doc. ^{MM} Lenka Studničná	135							29
	Dr. ^{MM} Eva Černožorská	82							29
	Mgr. ^{MM} Tereza Beránková	29		2				2	29
	Mgr. ^{MM} Michal Hlavatý	29							29
	Mgr. ^{MM} Jan Rygl	29							29
19.	Mgr. ^{MM} Michal Takács	37							28
20.	Mgr. ^{MM} Radim Vansa	26							26
21.	Mgr. ^{MM} Marek Scholz	33							25
22.	Mgr. ^{MM} Jaroslav Hančl	24							24
23–25.	Dr. ^{MM} Jindřich Soukup	69							20
	Mgr. ^{MM} Ondřej Tkáč	37							20
	Mgr. ^{MM} Ján Pich	20							20
26–28.	Bc. ^{MM} Mája Kolovratníková	19							19
	Bc. ^{MM} Alžběta Pechová	19	3	3				6	19
	Bc. ^{MM} Petr Smital	19			5			5	19
29.	Mgr. ^{MM} Petra Malá	47							18
30.	Mgr. ^{MM} Kateřina Böhmová	34							17
31–34.	Mgr. ^{MM} Štěpánka Mohylová	41							15
	Bc. ^{MM} Dáriuš Gál	15	0	2				2	15
	Bc. ^{MM} Marek Pecha	15	2	0	1	9		12	15
	Bc. ^{MM} Vlado Virčík	15							15
35.	Dr. ^{MM} Karla Procházková	72							14

Poř.	Jméno	\sum_{-1}	Úlohy						\sum_0	\sum_1
			r1	r2	r3	t4	t6			
36.	Bc. ^{MM} Cyril Hrubíš	13							13	
37–38.	Dr. ^{MM} Jozef Cmar	84							11	
	Bc. ^{MM} Roman Derco	11							11	
39.	Mgr. ^{MM} Vojtěch Kubáň	43							9	
40–42.	Mgr. ^{MM} Monika Martinisková	24							8	
	Mgr. ^{MM} Tomáš Javůrek	21			4			4	8	
	Bc. ^{MM} Tereza Pechová	11		3				3	8	
43–46.	Radek Beňo	7							7	
	Jakub Beran	7							7	
	Marie Kolářová	7							7	
	Robert Roreitner	7							7	
47.	Mgr. ^{MM} Peter Greškovič	39							6	
48–49.	Mgr. ^{MM} Petr Morávek	20							5	
	Marian Vráblik	5							5	
50–57.	Marek Basovník	4		3	1			4	4	
	Martin Berka	4							4	
	Jan Konopásek	4							4	
	Martin Krivánek	4							4	
	Aleš Podolník	4							4	
	Kristýna Stodolová	4							4	
	Martin Všetička	4							4	
	Jaroslav Žák	4		3				3	4	
58.	Kateřina Zuzanařáková	3							3	
59.	Lucie Mikšíková	2							2	
60.	Mgr. ^{MM} Luboš Uličný	36							1	

Sloupeček \sum_{-1} je součet všech bodů získaných v našem semináři, \sum_0 je součet bodů v aktuální sérii a \sum_1 součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$). Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.



Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235

E-mail: MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz

WWW: <http://mam.mff.cuni.cz>

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.