M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XI **číslo 4**

Termín odeslání: 7. 3. 2005

Milí řešitelé, milé řešitelky,

v nejbližší době očekávejte pozvánky na soustředění, které bude nedaleko Nejdku v termínu od 26. 2. do 6. 3. 2005. Nezapomínejte ale, že body z tohoto čísla se Vám přesto budou hodit, když se budete ucházet o místo na podzimním soustředění. Navíc ještě stále nemáme žádného řešitele s titulem Akad.$^{\mathrm{MM}}$:-)

Redakce

Zadání úloh

Úloha 4.1 – Číslování pokojů (5b)

Představte si, že potřebujete očíslovat pokoje na koleji.

Čísla na pokoje píšete tahem štětcem přes šablonku. Šablonku změníte tím, že vždy odstraníte první cifru a přidáte nějakou na konec.

Měnění cifer v šablonce je na tom všem samozřejmě to nejnudnější, takže těch výměn chcete udělat co nejméně. Protože jde o kolej plnou matematiků, budou pokoje očíslované ve dvojkové soustavě. Protože je tam i hodně fyziků, mohou být pokoje na chodbách v libovolném pořadí (oni už si nějaké pravidlo vymyslí); a protože jsou tam i informatici, je třeba před malá čísla napsat správné množství nul (tak, aby měla všechna čísla stejný počet cifer).

Je-li na koleji n pokojů očíslovaných 0 až $(n-1)$, na kolik změn šablonky to lze celé uskutečnit? Kdy to lze právě $(n-1)$ přehozeními (což je zřejmě minimum)? Kolik změn je konkrétně potřeba např. pro $n = (300)_{10}$?

Úloha 4.2 – Teploty na pólech (4b)

Na jižním pólu je stanice, na které naměřili průměrnou roční teplotu $-48\,°\mathrm{C}$. Blízko severního pólu (na $83°38'$ s. š., $33°22'$ z. d.) je grónská stanice, kde také měřili průměrnou teplotu, a vyšla jim jen asi $-17\,°\mathrm{C}$. Proč je mezi těmito hodnotami takový rozdíl, když slunce osvětluje obě místa prakticky stejně?

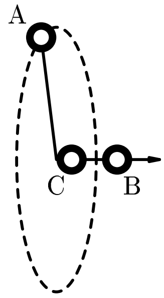
Průměrné měsíční teploty ve °C jsou:

	I.	II.	III.	IV.	V.	VI.	VII.	VIII.	IX.	X.	XI.	XII.
84° s. š.	−31	−32	−31	−23	−11	−1	1	—	−9	−20	−27	−28
90° j. š.	−58	−58	−58	−50	−37	−26	−26	−38	−52	−56	−56	−57

Otázka zní: Proč je průměrná teplota na jižním pólu mnohem nižší než průměrná teplota blízko severního pólu? Prozradíme vám, že občas severní pól rozmrzne úplně a je možné plavit se v jeho okolí například na kajaku.

Teploty jsou převzaty ze stránek `http://www.weatherbase.com/`.

Úloha 4.3 – Irigiho hračka (4b)



Irigi si pro radost koupil novou hračku. Sestává ze dvou kuliček A a B o poloměru r spojených provázkem délky l. Provázek navíc prochází úzkou dírou ve třetí kuličce C tak, že se skrz ni může volně posouvat.

Na začátku je kulička C posunuta tak, že se dotýká kuličky B. Kuličku C Irigi po celou dobu pevně drží, takže se nehýbe. Kuličku A roztočí úhlovou rychlostí ω. Pak začne pomalu tahat za kuličku B a tím zkracuje poloměr kružnice, po které se pohybuje kulička A.

Jakou práci bude muset vykonat, než takto přitáhne kuličku A až do středu otáčení (tedy že se dotkne kuličky C)? Působení tření zanedbejte.

Řešení témat

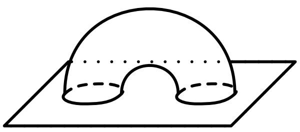
Téma 1 – Podivné plochy

Shrnutí vlastností 2-D ploch

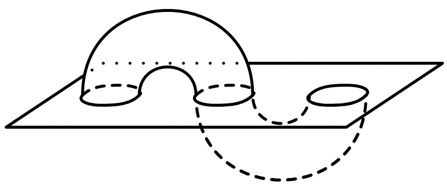
Doc.[MM] *Zbyněk Konečný*

V topologii je dokázáno, že každý 2-D prostor lze deformací převést na kulovou plochu s určitým počtem děr, uch a „crosscapů“.

Ucho je útvar vzniklý tak, že do kulové plochy uděláme dvě díry a propojíme je zdeformovanou válcovou plochou (viz obr. t1.1). Crosscap je útvar vzniklý tak, že do kulové plochy uděláme otvor a k jeho hraně připojíme hranu Möbiova proužku. Přidání dvou crosscapů je ekvivalentní s tím, že do kulové plochy uděláme dvě díry a propojíme je zdeformovanou válcovou plochou protínající kulovou plochu (viz obr. t1.2).[1]



Obr. t1.1

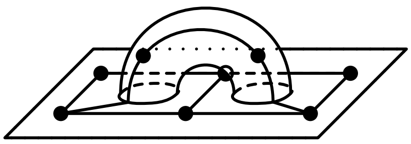


Obr. t1.2

[1] Tento útvar se také označuje jako Kleinova lahev.

Rovina[2] je tedy ekvivalentní s kulovou plochou s jednou dírou, válcová plocha s kulovou plochou se dvěma dírami, torus s kulovou plochou s jedním uchem, Kleinova láhev s kulovou plochou se dvěma crosscapy a Möbiův proužek s kulovou plochou s jednou dírou a jedním crosscapem. Každý 2-D prostor ekvivalentní s kulovou plochou bez děr s libovolným počtem crosscapů a uch má konečný obsah, obrácené tvrzení obecně neplatí.

Nechť je dán na kulové ploše libovolný dostatečně hustý graf[3]. Nejprve z něj odstraním vrcholy, z nichž vede pouze jedna hrana, a odstraním i tuto hranu. Eulerova charakteristika se tím nezmění. Toto budu provádět, dokud nebudou všechny vrcholy v grafu součástí alespoň jedné kružnice. Pak si vyberu jednu plochu a začnu odstraňovat vrcholy obklopující tuto plochu spolu s hranami, které z nich vedou. Když odstraním spolu s vrcholem k hran, spojí se k ploch do jedné. Eulerova charakteristika se zmenší o $1-k+(k-1)=0$, zůstane tedy opět zachována. Pokud během tohoto odstraňování dojdu do situace, v níž z nějakých bodů opět vede pouze jedna hrana, tak tyto body i s příslušnými hranami odstraním. Postupným snižováním počtu ploch a hran se dostanu do stavu, kdy se celá kulová plocha spojí do jedné plochy a zbude v ní jediný bod (spojitost grafu byla v průběhu odstraňování zachována, nemůže proto zbýt více bodů; možnost, že by nezbyl žádný, mohu také vyloučit, protože každá z odstraňovaných hran spojovala 2 vrcholy, a v každém kroku byl odstraněn pouze jeden). Eulerova charakteristika kulové plochy je proto $1+1=2$.



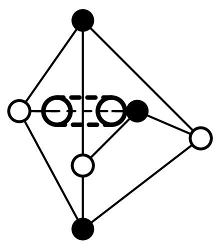
Obr. t1.3

Přidáním každé díry se Eulerova charakteristika 2-D prostoru o 1 zmenší (díra přidaná do oblasti grafu způsobí, že tato oblast zanikne). Přidáni crosscapu nebo ucha zmenší Eulerovu charakteristiku o 1, respektive o 2 (obdobně jako na kulové ploše mohu postupně odstraňovat plochy a hrany grafu, aniž by se změnila Eulerova charakteristika, stačí tedy nalézt dostatečně husté grafy pro okolí ucha, resp. crosscapu a ukázat, že mají Eulerovu charakteristiku o 2, resp. o 1 menší než kulová plocha, tedy 0, resp. 1). Charakteristika okolí ucha je $8+2-10=0$ (viz obr. t1.3). To, že je charakteristika okolí crosscapu 1 se mi nepodařilo korektně dokázat.

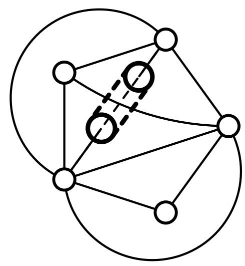
Množina grafů, které lze nakreslit v rovině, je shodná s množinou grafů, které lze nakreslit na kulovou plochu s n dírami, 0 uchy a 0 crosscapy pro libovolné n, neboť přidání díry nemůže ovlivnit to, jestli lze graf sestrojit či nikoli. Je známo, že každý graf, který není rovinný, musí obsahovat jeden z grafů $K_{3,3}$ nebo K_5 (graf složený z 5 vrcholů, každý je spojen se zbylými čtyřmi). Oba tyto grafy lze nakreslit na 2-D prostor s jedním uchem nebo zdvojeným crosscapem. (Tyto grafy jsou na obr. t1.4 a obr. t1.5, ucho je zde vyznačeno tlustou čárkovanou čarou, spojnice procházející po povrchu ucha je vyznačena

[2] Resp. disk – dohodneme-li se, že jde o tentýž objekt, pak rovina je pouze nekonečně roztažený disk.

[3] Tvrzení podle následujícího postupu zřejmě platí pro každý graf.



Obr. t1.4



Obr. t1.5

tenkou čárkovanou čarou, černé body v $K_{3,3}$ jsou vrcholy x_i, bílé y_i). Obecně se tedy množina grafů, které lze na plochu nakreslit, zvětšuje s počtem uch a crosscapů.

Irigi

Téma 4 – Střílečka

Pozn. red.: Přišlo mnoho dobrých algoritmů a několik programů. Vzhledem k tomu, že je jistě ještě mnoho dalších lidí, kteří chtějí poslat nějaké programy do turnaje, rozhodli jsme se zatím žádné algoritmy neotisknout (protože by to zvýhodnilo ty řešitele, kteří pošlou svůj program až po jejich přečtení.) Nemějte však obavy – o to více jich zveřejníme v dalším čísle.

Zároveň také vyhlašujeme uzávěrku na posílání programů (to se ale netýká jiných příspěvků) – turnaj se uskuteční po uzávěrce tohoto čísla, proto je potřeba vaše programy do této doby poslat.

Střílečka jako psychologická hra

Dr.[MM] Eva Černohorská

Počítač stíhá kontrolovat, kdo zrovna střílel a po kom, kdo má nabito, ale co chudák obyčejný hráč, jenom člověk? Ten má smůlu. A navíc, střílečka je tu hlavně pro naši zábavu, a ne pro zábavu několika programů ... Proto jsem se rozhodla zabývat se střílečkou jako společenskou hrou, kde musím upozornit na to, že všichni hráči si na začátku společně nabijí, a to řekněme že v 0. kole.

Ve střílečce jako společenské hře také neplatí princip náhody, ale většina lidí nad ní také nepřemýšlí. Ale i přesto při každé hře určitý člověk hraje velmi podobně, opakuje své osvědčené postupy ... Já jsem vysvětlila pravidla 28 lidem, nechala jsem je chvíli hrát, a potom jsem udělala dvě skupinky po 14, nejdříve jedna skupinka hrála a druhá zapisovala jejich tahy – celkem 5 her, potom se skupinky vyměnily, a postup jsem zopakovala. Z takto získaných dat jsem vyhodnotila tyto otázky:

1. Co děláš většinou v 1. kole?
   a) Kryji se . . . . 13 lidí (46,4 %).

b) Střílím . . . . 10 lidí (35,7 %).
c) Nabíjím . . . . 5 lidí (17,9 %).

2. Na kolik lidí průměrně střílíš?

a) Asi na třetinu . . . . 5 lidí (17,9 %).
b) Asi na dvě třetiny . . . . 9 lidí (32,1 %).
c) Na všechny . . . . 0 lidí (0 %).
d) Pokaždé na někoho jiného . 13 lidí (46,4 %).
e) Na jednoho člověka . . . . . . 1 člověk (3,6 %).

3. Co většinou děláš po střelbě?

a) Kryji se . . . . 20 lidí (71,4 %).
b) Střílím . . . . 2 lidi (7,2 %).
c) Nabíjím . . . . 6 lidí (21,4 %).

4. Kolik jsi měl(a) nejvíce nábojů?

Modus 2; medián 2,5; průměr 2,75.

5. Kolikáté kolo po střelbě většinou nabíjíš? (průměr 2,07)

1. – 6 lidí (21,4 %).
2. – 16 lidí (57,1 %).
3. – 5 lidí (17,9 %).
4. – 1 člověk (3,6 %).

A co se z toho dá usoudit?[4] Asi nejlepší je po lidech střílet druhé kolo po střelbě, to je pravděpodobnost zásahu větší než 0,5. Také je možná chytré se krýt v prvních dvou kolech, protože hodně lidí střílí. Je zajímavé, že v prvních třech kolech zemře nejvíce lidí, takže doporučuji začáteční strategii, krýt se, co to jde. :-)

Irigi

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Posloupnost (4b)

Zadání:

Najděte další prvky této posloupnosti a řekněte, podle jakého pravidla je vytvořena.

$$1, 2, 2, 3, 2, 4, 2, 4, 3, 4, 2, 6, 2, 4, 4, 5, 2, 6, 2, 6, 4, 4, 2, 8, 3, 4, 4, 6, 2, 8, \ldots$$

[4] *Pozn. red.: Je dobré vědět, jakou chybou je zatíženo toto měření. Zkusme ji odhadnout: Zabývejme se chybou těch otázek, kde tázaní vybírají z určitého diskrétního počtu stavů (např. otázka 3). Použijeme teoretický odhad chyby pro binomické rozdělení (což je zcela korektní, uvážíme-li, že za pozitivní případ bereme pozitivní odpověď na danou otázku a za negativní případ vše ostatní) – platí $\sigma = \sqrt{N(1-p)p}$, přičemž stačí, když za p bereme podíl dané odpovědi. Tedy např. pro otázku tři je chyba přibližně 8,5 %, což je, s přihlédnutím k počtu měření, poměrně slušný výsledek.*

Řešení:
Řešení bylo prosté (a pro většinu z vás i celkem zřejmé, často pomohlo, že na prvočíselných pozicích byly dvojky), ale přesto se několika z vás povedlo vymyslet skutečně originální řešení – například polynomiální závislost na počtu prvočísel v rozkladu a jejich největší mocnině. I takováto řešení ale fungovala, navíc se od našeho v několika následujících číslech nelišila, takže byla uznána.

Naše řešení bylo prosté, p_i byl počet dělitelů čísla i, tedy 1 pro $i = 1$, 2 pro dvojku a další prvočísla, 3 pro druhé mocniny prvočísel atd.

Obecně: zapíšu-li číslo i jako

$$i = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n} ,$$

kde p_i jsou (různá) prvočísla, je počet dělitelů

$$s_i = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \dots (\alpha_n + 1) .$$

A proč tohle platí? Každý dělitel je součin

$$d_{[\beta_1,\beta_2,\dots,\beta_n]} = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n} , \quad \text{kde} \quad \begin{matrix} 0 \le \beta_1 \le \alpha_1 \\ \vdots \\ 0 \le \beta_n \le \alpha_n \end{matrix} .$$

Když můžeme každý člen p_i v tomto součinu použít (0 až α_i)-krát a každá kombinace $[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n]$ nám dá jiného dělitele, vyjde nám jednoduchou kombinatorikou přesně s_i dělitelů i (včetně 1 a i).

Tomáš Gavenčiak

Úloha 2.2 – Vlak v zatáčce (6b)

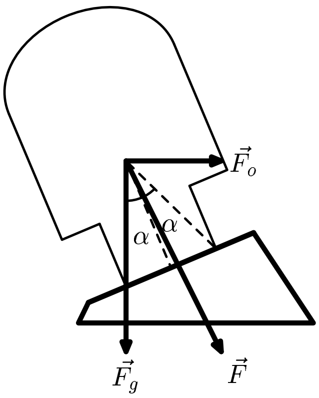
Zadání:
Vlak vjíždí do zatáčky. Jakou nejvyšší rychlostí skrz ni může projet, aby se nepřevrátil? Jak se tato rychlost změní, když bude zatáčka klopená? (Nezapomeňte, že zatáčka může být klopená nejvíce tolik, aby vlak, který v ní zastaví, nespadl.)

Dokážete (experimentálně) určit, jaké odstředivé zrychlení je pro cestující ještě únosné? Jak tento údaj ovlivní maximální rychlosti z předchozího odstavce?

Řešení:
Hneď na začiatku zanedbáme niekoľko železničných detailov. Celý vozeň nahradíme jeho prierezom. Toto zanedbanie nám zmení výsledok len nepatrne. Na samotnom priereze nás zaujíma tiež len zopár detailov. Tie si teda vhodne označíme. Výšku ťažiska (od spodnej hrany kolies) označíme h a rozchod r.

Rozhodne bude pôsobiť sila tiažová $\boldsymbol{F}_\mathrm{g}$ a sila odstredivá $\boldsymbol{F}_\mathrm{o}$. Z nich nie je problém vytvoriť nejakú tu výslednú silu $\boldsymbol{F}$. Vozeň sa opiera iba na dvoch miestach – na pravej a na ľavej koľajnici. Sila $\boldsymbol{F}$ tak vytvára voči týmto dvom potenciálnym osiam otáčania nejaký moment (vezmime do úvahy ten, vznikajúci voči vonkajšej koľajnici, kedže okolo nej sa bude vlak v zákrute prevracať).

Jednoduchou úvahou prídeme na to, že kým bude pôsobiaca sila smerovať medzi koľajnice, moment otáčania bude tlačiť vozeň proti koľajnici vnútornej, čiže proti pevnej podložke, takže sa vozeň neprevráti.



Obr. r2.1

Kedže ale odstredivá sila smeruje von zo zákruty a tiažová sila priamo dole, výsledná sila bude smerovať tiež von zo zákruty. Čo sa deje, dokiaľ sila smeruje medzi koľajnice, už vieme. Čo ak ale smeruje niekam von? V tomto prípade nie je moment sily kompenzovaný tlakom koľajnice a otáča vlakom smerom von zo zákruty. Kedže žiadna ďalšia sila už nepôsobí, vlak sa prevráti. Kritický je prípad, keď výsledná sila smeruje priamo do koľajnice.

I keď moment sily môžeme vyjadriť ako vektorový súčin vektora sily a polohového vektora ťažiska (vzhľadom na os otáčania), použijeme o niečo jednoduchšiu metódu. Odstredivá a tiažová sila sú predsa na seba kolmé a sú rovnobežné s rozmermi vozňa r a h. Potom ale musí platiť:

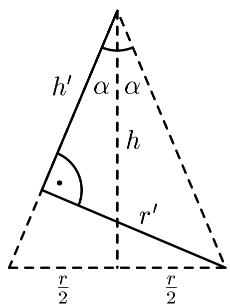
$$\frac{F_\mathrm{o}}{F_\mathrm{g}} = \frac{r/2}{h}\,. \qquad \text{(r2.1)}$$

Keď následne dosadíme za F_o a F_g (so silami pracujeme v skalárnom tvare) $F_\mathrm{o} = mv^2/R$ a $F_\mathrm{g} = mg$, dostaneme:

$$\frac{v^2}{gR} = \frac{r}{2h}\,,$$

kde R je polomer zákruty. Po pár úpravách tak dostaneme výsledný vzťah pre maximálnu rýchlosť vlaku v neklopenej zákrute:

$$v = \sqrt{\frac{grR}{2h}}\,.$$



Obr. r2.2

Teraz zákrutu naklopíme. Z obrázku r2.2 a pomocou jednoduchej úpravy vidíme, že tangens uhla α je $r/2h$, čiže $\alpha = \mathrm{arctg}(r/2h)$. No a α je maximálny uhol naklonenia zákruty, aby sa v nej vlak neprevrátil.

Zároveň ale môžeme formulovať (ale iba v prípade maximálneho naklonenia):

$$\cos\alpha = \frac{h}{\sqrt{\left(\frac{r}{2}\right)^2 + h^2}}\,.$$

Teraz už vidíme, že $F_\mathrm{o}/F_\mathrm{g} = r'/h'$ a zároveň $r' = r\cos\alpha$ a $h' = h/\cos\alpha$. Takže znova dosadíme (za sily aj rozmery):

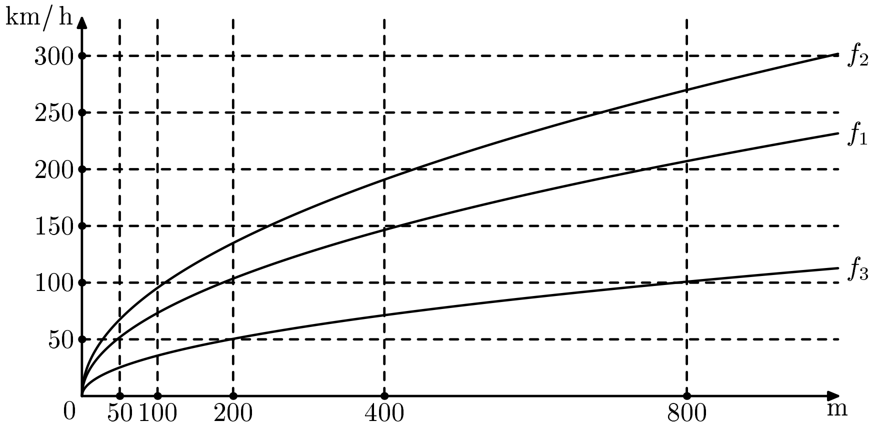
$$\frac{v^2}{Rg} = \frac{r}{h}\cos^2\alpha\,.$$

Ostáva len dosadiť za $\cos\alpha$ a vyjadriť v:

$$v = \sqrt{\frac{4hrRg}{r^2 + 4h^2}}\,. \tag{r2.2}$$

Aby sme zistili, ako sa nám zmení maximálna rýchlosť tým, že naklopíme zákrutu rovnakého polomeru, zrátame pomer rýchlosti podľa (r2.2) a podľa (r2.1). Výsledok má tvar:

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{2h}{\sqrt{r^2 + 4h^2}}\,.$$



Obr. r2.3 – závislosť najvyššej rýchlosti prejazdu na polomere zákruty

Na obrázku r2.3 vidíme graf závislosti rýchlosti na polomere zákruty pre polomer od 0 do 1000 metrov a hodnoty $r = 1{,}435\,\mathrm{m}$ a $h = 1{,}7\,\mathrm{m}$. Krivka f_1 patrí k neklopenej zákrute, krivka f_2 k zákrute klopenej. Na krivke f_3 je rýchlosť v neklopenej zákrute, pri ktorej odstredivé zrýchlenie dosahuje $0{,}1g$. K podobnej hodnote by sa určite dalo dospieť aj experimentálne, ale určovanie komfortu je vec veľmi náročná. Hlavný problém je, že ide o veľmi subjektívny pocit. Najľahšie sa určuje na centrifúge, ku ktorej akosi nemáme prístup. Navrhovaný experiment by mohol vyzerať napríklad takto: Do auta okrem vodiča posadíme osobu O a budeme s ňou jazdiť jednu zákrutu o známom polomere stále sa zvyšujúcou rýchlosťou, až O vyhlási, že odstredivé zrýchlenie je už nepríjemné (citeľné). Potom pokračujeme v experimente s ďalšou osobou a postupne sa dostaneme k nejakej priemernej hodnote. Uznáte, že pri dnešných cenách benzínu je to dosť neekonomické. Druhá možnosť je skúsiť, kedy sa cestujúcim začnú šmýkať či prevracať poháre s pitím. To môžeme skúsiť aj teoreticky: $F_\mathrm{t} = \xi mg$, $F_\mathrm{o} = v^2/g$, $v^2/g = \xi g$, čiže odstredivé zrýchlenie je nanajvýš ξg a pri tom ξ je malé číslo niekde blízko 0,2, pre šmykľavé povrchy (napríklad sklo na tvrdenom plaste) kľudne aj 0,1 alebo menej.

V klopenej zákrute to bude s dodržovaním odstredivého zrýchlenia zaujímavejšie. Ako vidíme na obrázku r2.1, výsledná sila F smeruje zhruba do podlahy, ale nie kolmo k nej. Takže si ju rozložíme na dve zložky – zložku F'_g, ktorá bude smerovať kolmo na podlahu, a zložku F'_o, ktorá bude na ňu kolmá (a teda rovnobežná s podlahou). Toto rozloženie nám rozhodne nebude robiť problém. Všimnime si zaujímavý výsledok: sila F'_g je v podstate virtuálna tiažová sila a F'_o je virtuálna odstredivá sila. Rozhodne môžeme predpokladať, že nejaké zmeny vo veľkosti F'_g cestujúcim vadia oveľa menej ako zmeny F'_o (napríklad väčšina ľudí nemá problém so zrýchlením výťahu). Ako sa dá zmeniť F'_o? Buďto zmeníme uhol sily F voči podlahe (zmenou rýchlosti a teda aj odstredivej zložky sily), alebo zmeníme uhol podlahy voči sile F. Druhá možnosť sa dá ešte rozdeliť na zmenu naklonenia zákruty (ale to máme obmedzené podmienkou neprevrátenia zastaveného vlaku), alebo naklonením skrine vozňa voči podvozku. Nepripomína Vám to niečo, napríklad vlaky s naklápacou skriňou ako Pendolino? Ak by sme chceli využiť maximálnu možnú rýchlosť prejazdu zákrutou (teda tú, keď sila smeruje na vonkajšiu koľajnicu a odchýlku od kolmice má α), tak by sme naklonili skriňu vozňa voči podvozku o uhol α. Tým sa akékoľvek odstredivé sily premietnú na zvýšenie „tiaže“. Je ale pravda, že týmto sa pravdepodobne zmení aj poloha ťažiska vozňa, že musíme dávať pozor, aby bol pantograf (zberač el. energie) stále v kontakte s trolejom, a že sa naklonením o uhol α, ktorý má pre použité parametre hodnotu blízku $23°$, pravdepodobne dostanú niektoré časti vozňa aj mimo tzv. prejazdný profil, čiže budú zasahovať do priestoru pre protiidúci vlak (možno aj preto je Pendolino také malé v porovnaní s ostatnými vlakmi, aj keď hlavná je určite aerodynamika, kedže je určené pre jazdu rýchlosťou až 230 km/h).

Jeffer

Úloha 2.3 – Vepsaný mnohoúhelník (4b)

Zadání:

Je dána kružnice o pevném poloměru r. Najděte takový vepsaný n-úhelník (pro dané n), aby měl maximální obsah. Nezapomeňte na důkaz.

Řešení:

Většina došlých řešení byla až na drobné detaily správná. Někteří řešitelé bohužel nepochopili správně zadání a snažili se najít takové n, pro které je obsah maximální. To však nebylo cílem – jak jsme v zadání zdůraznili, n bylo pevně dané. Několik elegantních řešení využilo Jensenovu nerovnost[5] pro funkci sinus na intervalu $\langle 0, \pi \rangle$, jiná se opírala o podobnou myšlenku jako řešení *Doc.$^{\text{M}}$ Stanislava Basovníka*, které zde otiskujeme jako vzorové.

[5] Viz například webová stránka `http://planetmath.org/encyclopedia/JensensInequality.html`, důkaz je na stránce `http://planetmath.org/encyclopedia/ProofOfJensensInequality.html`.

Vepsaný n-úhelník s maximálním obsahem

Doc.^M Stanislav Basovník

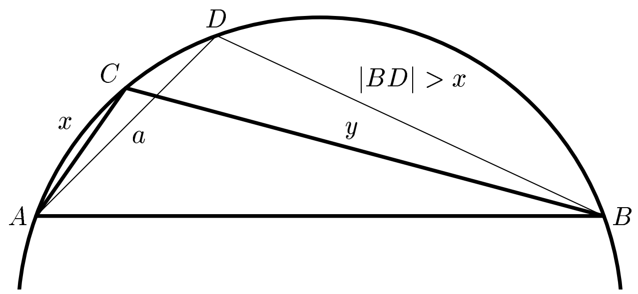
Uvažujme libovolný nepravidelný n-úhelník vepsaný do kružnice o poloměru r. Při daném r a n je strana a pravidelného n-úhelníku jednoznačně dána.

Je zřejmé, že nepravidelný n-úhelník obsahuje vždy alespoň jednu stranu s délkou menší než a a zároveň alespoň jednu stranu s délkou větší než a. Pokud by měl všechny strany buď menší, nebo všechny větší než a, nemohl by být vepsán do stejné kružnice jako pravidelný n-úhelník s délkou strany a, což je spor.

Dále si uvědomme, že tětivový n-úhelník je konvexní, takže můžeme prohodit dvě sousední strany, čímž se obsah nezmění.

Nyní si popíšeme krok, při kterém transformujeme libovolný tětivový nepravidelný n-úhelník na jiný tětivový n-úhelník (s opsanou kružnicí o stejném poloměru) tak, že se nám jeho obsah zvětší.

Postupnou záměnou sousedních stran nepravidelného n-úhelníku můžeme po konečném počtu prohození dosáhnout libovolné permutace délek stran. Víme, že nepravidelný n-úhelník obsahuje stranu menší než a a zároveň stranu větší než a. Nechť jsou dvě takové strany vedle sebe (umíme si je přerovnat). Pak prodloužením kratší strany na délku a a zkrácením delší strany na příslušnou délku zvětšíme obsah n-úhelníku. Důkaz ($x < a \wedge y > a$) je vidět na obrázku r3.1.



Obr. r3.1

Z obrázku je patrné, že výška trojúhelníku ABD je vždy větší než výška trojúhelníku ABC, protože $|BD| > x$. Z toho plyne, že trojúhelník ABD má větší obsah než trojúhelník ABC.

Je zřejmé, že každý tento krok nám vytvoří novou stranu délky a a zároveň se nám zvětší celkový obsah n-úhelníku. Odtud plyne, že po *konečném* počtu kroků lze převést libovolný nepravidelný n-úhelník na pravidelný, který má ze všech největší obsah.

Maximální obsah má takový n-úhelník, který je pravidelný.

Helča

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.^{MM} Peter Perešíni	75	4		4		8	16	31
2–3.	Doc.^{MM} Zbyněk Konečný	104	4	5	4	14		27	27
	Mgr.^{MM} Tereza Beránková	27	4		1			5	27
4.	Mgr.^{MM} Zuzana Safernová	42	4	3	4			11	26
5.	Mgr.^{MM} Michal Takács	33	4		4			8	24
6.	Mgr.^{MM} Radim Pechal	23	4		2		6	12	23
7.	Doc.^{MM} Tereza Klimošová	113	4		4		5	13	22
8.	Mgr.^{MM} Jaroslav Hančl	21	4		4			8	21
9.	Dr.^{MM} Jindřich Soukup	67	4		4			8	18
10–12.	Doc.^{MM} Lenka Studničná	123	4	5	4			13	17
	Bc.^{MM} Veronika Bachratá	17	4		3		3	10	17
	Bc.^{MM} Michal Hlavatý	17		5	2			7	17
13–17.	Doc.^{MM} Stanislav Basovník	141	4	2	4			10	16
	Dr.^{MM} Eva Černohorská	69	4		4		8	16	16
	Mgr.^{MM} Bedřich Roskovec	40		5	2			7	16
	Mgr.^{MM} Marek Scholz	24		6				6	16
	Bc.^{MM} Jan Rygl	16	4		3			7	16
18–20.	Bc.^{MM} Ján Pich	15			4			4	15
	Bc.^{MM} Radim Vansa	15		4	3			7	15
	Bc.^{MM} Vlado Virčík	15							15
21.	Bc.^{MM} Petr Smital	14		4	4			8	14
22–23.	Dr.^{MM} Jan Musílek	73							13
	Mgr.^{MM} Štěpánka Mohylová	39	4					4	13
24.	Bc.^{MM} Jakub Opršal	12	4		4			8	12
25.	Bc.^{MM} Roman Derco	11							11
26.	Bc.^{MM} Matěj Korvas	10		3				3	10
27–28.	Mgr.^{MM} Vojtěch Kubáň	43							9
	Mgr.^{MM} Kateřina Böhmová	26							9
29–32.	Mgr.^{MM} Petra Malá	37	2					2	8
	Mgr.^{MM} Monika Martinisková	24							8
	Cyril Hrubiš	8	4		4			8	8
	Zdeněk Jaroň	8							8
33–36.	Mgr.^{MM} Ondřej Tkáč	24							7
	Radek Beňo	7							7
	Marie Kolářová	7							7
	Robert Roreitner	7							7

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t4	$\sum_0$	$\sum_1$
37–39.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	64	3					3	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Greškovič	39							6
	Alžběta Pechová	6			2			2	6
40–42.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Morávek	20		3				3	5
	Tereza Pechová	8							5
	Marian Vráblik	5							5
43–50.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ František Konopecký	31							4
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Javůrek	17			4			4	4
	Martin Berka	4		2	1			3	4
	Jan Konopásek	4							4
	Martin Křivánek	4							4
	Aleš Podolník	4							4
	Kristýna Stodolová	4							4
	Martin Všetička	4							4
51.	Kateřina Zuzaňáková	3			0			0	3
52.	Lucie Mikšíková	2							2
53–54.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ľuboš Uličný	36							1
	Jaroslav Žák	1							1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.