Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník XI číslo 3

Termín odeslání: 31. 1. 2005

Milí řešitelé, milé řešitelky,

příští soustředění M&M se už rychle blíží. Rozhodli jsme se totiž, že tentokrát uspořádáme skutečně zimní. Takže se bude konat v (doufejme) zasněžených Krušných horách od 26. 2. do 6. 3. 2005. Účastníky budeme vybírat podle výsledkové listiny za první až třetí číslo letošního ročníku, takže máte poslední šanci získat navíc nějaké bodíky.

Redakce

Zadání témat

Téma 5 – Sluneční plachetnice

Na čtyřech obydlených světech bylo sotva dvacet lidí, kteří dokázali řídit sluneční jachtu; a všichni byli tady, na startovní čáře nebo v doprovodných lodích, kroužili třiatřicet tisíc kilometrů nad rovníkem.

...

Mertonovi, který se bez tíže vznášel u periskopu, připadalo, že zakrývá celou oblohu. A ani nebyl tak daleko od pravdy protože tam venku měl bezmála pět milionů čtverečních metrů plachty, připoutané k jeho maličké kabině skoro stopadesáti kilometry lan. Kdyby se všechno plachtoví všech čajových clipperů, které kdysi jako mračna brázdily Čínské moře, sešilo do jediné gigantické plochy, stále ještě by se nevyrovnalo té jediné plachtě, kterou ke slunci rozprostírala Diana. A přitom byla jen o něco hmotnější než mýdlová bublina; těch skoro pět čtverečních kilometrů pohliníkovaného plastu bylo jen několik milióntin centimetru tlustých.

...

Konstrukce Diany byla správná; obrovská plachta se chovala tak, jak podle výpočtů měla. Při téhle rychlosti budou dva okruhy kolem Země stačit na to, aby nabral únikovou rychlost, a pak bude moci vyrazit k Měsíci s plnou silou Slunce v zádech.

...

Vztáhněte ruce ke Slunci, říkával. Co cítíte? Samozřejmě teplo. Ale kromě tepla je tu ještě tlak, i když tak malý, že jste si ho nikdy nevšimli. Na ploše vašich dlaní dosahuje asi jen tři stotisíciny gramu. Ale ve vesmíru dokonce i tak malý tlak může mít význam, protože působí pořád, hodinu za hodinou, den za dnem. Na rozdíl od raketového paliva je zadarmo a nevyčerpatelný. Jestli chceme, můžeme ho použít. Můžeme postavit plachty, které zachytí sluneční vítr. V tom okamžiku vždycky vytáhl pár čtverečních metrů plachty a hodil *je směrem k publiku. Stříbřitý film se vlnil a kroutil jako dým, a pak pomalu vystoupal ke stropu v proudech teplého vzduchu. Vidíte, jak je lehká, pokračoval pak. Čtvereční kilometr váží necelé půl tuny a může shromáždit asi kilo slunečního tlaku. Tím se začne pohybovat a my se můžeme nechat táhnout s ní, pokud jsme k ní připoutáni.*

A. C. Clarke: Sluneční vítr (ze sbírky Hlídka)

Může opravdu Merton na sluneční plachetnici Diana dosáhnout únikové rychlosti a vydat se na cestu k Měsíci? Autor povídky před jejím napsáním nic složitě nepropočítával, takže je na vás, abyste to ověřili – měl, anebo neměl pravdu?

Všechny chybějící údaje (jako například hmotnost Diany) rozumně odhadněte.

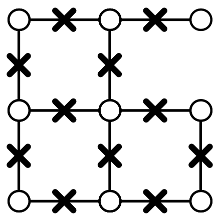
Až vás přestane bavit počítat závody k Měsíci, můžete se zamyslet nad některými dalšími problémy:

- Navrhněte způsob manévrování s plachtou tak, aby se plachetnice mohla dostat do blízkosti Slunce.
- Navrhněte takový manévr v blízkosti Slunce, aby jím plachetnice získala dostatečnou energii na definitivní únik ze Sluneční soustavy.
- Jakou velikost musí mít plachta, aby plachetnice dokázala odletět do mezihvězdného prostoru?

Téma 6 – Keltské uzly

Tohle tématko se bude zabývat jedním ze způsobů, jak se kreslí uzlovité obrazce na keltských křížích – možná už jste viděli kříž, jehož celá přední strana byla pokryta podivným ornamentem připomínajícím uzel. Zde popíšu způsob, jak zadat a nakreslit některé takové.

Zadání bude vždy jako *rovinný graf*[1]. Nejprve se zaměřím na *čtvercové grafy* – vrcholy budou v mřížových bodech a hrany jen mezi sousedními mřížovými body, a to ještě jen vodorovně a svisle. Rovnou si uprostřed každé hrany vyznačím malý křížek (viz obr. 1).

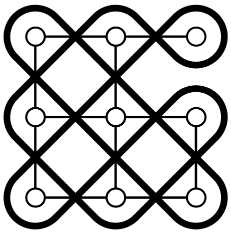


Obr. 1

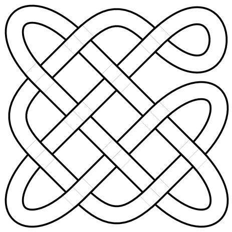
Teď budu křížky spojovat křivkou tak, že půjdu rovně vždy, když je hned přede mnou další křížek, nebo budu zatáčet okolo rohu, ke kterému jsem více natočený, až do dalšího křížku. Takto to udělám ze všech křížků (obr. 2).

Všimněte si, že zde vznikly dvě *smyčky*. Mohl bych ještě u každého křížení určit, která část smyčky je tam nahoře. Zde to můžu udělat dokonce „nastřídačku" (viz obr. 3).

[1] Pro ty, co ho neznají, je rovinný graf soustava bodů (*vrcholů*) v rovině, z nichž některé jsou spojeny úsečkami (*hranami*) tak, že se žádné nekříží mimo vrcholy.



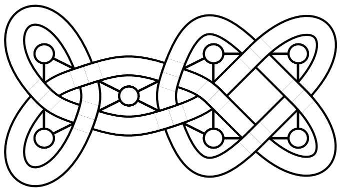
Obr. 2



Obr. 3

A teď pár otázek: Jsem schopen nakreslit toto pro každý čtvercový graf? (Nebude mi někde něco přebývat či chybět?) Jsem vždy schopen střídat křížení nahoře a dole? Jaká bude délka všech vytvořených smyček (když jsou v obrázku jen úsečky a části kružnic se středy ve vrcholech), jaký bude jejich počet?

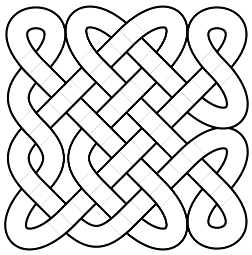
Nyní to trochu vylepším – zadání bude obecný graf, kreslit budu opravdu křivými křivkami, a to vždy tak, že budu obcházet ten vrchol, ke kterému jsem po přechodu křížku více přikloněný. I teď se budu snažit, abych v kříženích byl střídavě nahoře a dole. (A také aby to vypadalo co nejlépe. :-))



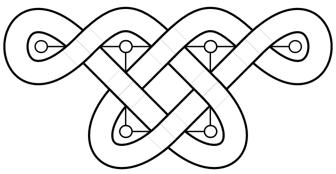
Obr. 4

Lze toto nakreslit pro každý graf? (Nebudou mi třeba přebývat volné konce?) Lze zachovat střídání křížení? Jak je to s počtem vzniklých smyček, jak se tento počet změní s přidáním nebo odebráním hrany?

Motivační otázky: Takto nakreslitelné uzly budou *grafové uzly* (se zachováním střídání křížení budou *propletené*, zadané čtvercovým grafem *čtvercové*). Lze každý propletený grafový uzel rozplést na jednotlivé smyčky, nebo alespoň některé? A co ty čtvercové? Na které grafové uzly lze přeplést nějaký grafový uzel a jak se změní jeho zadaní? A hlavně: lze každý skutečný uzel (nebo nějaké jeho přepletení) nakreslit jako propletený, či dokonce čtvercový propletený grafový uzel?



Odpovědi na první otázky se pokuste hlavně nějak dokázat, dále stačí i (alespoň trochu podložené) domněnky. Obecným uzlům s více smyčkami se běžněji říká *řetízky* a je kolem nich celkem složitá věda, zaměřte se spíše na čtvercové a dobře propletené grafové uzly, nepropletené uzly jsou trochu moc obecné. Samozřejmě také nakreslete co nejhezčí grafový uzel. :-)



Zadání úloh

Úloha 3.1 – Oblasti (5b)

Určete, jaký je maximální počet oblastí, na které rozdělí rovinu k různoběžných přímek. Kolik oblastí můžeme maximálně získat při dělení (třírozměrného) prostoru k rovinami? Najděte obecný vztah pro n-rozměrný prostor a příslušné nadroviny?

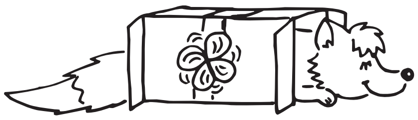
Úloha 3.2 – Čočky (6b)

Vymyslete měření, pomocí kterého dokážete zjistit, je-li neznámá čočka (například z brýlí) spojka, nebo rozptylka a jakou má optickou mohutnost (resp. ohniskovou vzdálenost). Určete (odhadněte) přesnost, s jakou jste touto metodou schopni optickou mohutnost určit. Zkuste vaši metodu prakticky ověřit.

Postup, který vymyslíte by měl být co nejjednodušší (pokud možno bez použití vybavení, které není běžně dostupné), ale zároveň dostatečně přesný. Zkuste najít rozumný kompromis mezi těmito požadavky.

Úloha 3.3 – Balení dárků (3b)

Do jakého nejmenšího papíru ve tvaru čtverce lze zabalit jednotkovou krychli (krychli o straně délky 1), pokud papír nesmíme rozstříhat.



Řešení témat

Téma 1 – Podivné plochy

Pozn. red.: Mgr.$^{\text{MM}}$ Monika Martinisková poslala důkaz toho, že navzájem neztotožnitelných ploch je nekonečně mnoho.

Dr.$^{\text{MM}}$ Peter Perešíni poslal důkaz Eulerova vzorce pro rovinné grafy a grafy na povrchu koule (bez uch), důkaz, že kouli s n uchy lze ztotožnit se součtem n torů a důkaz, že graf $K_{5,5}$ nelze v rovině zakreslit tak, aby se žádné dvě hrany neprotnuly.

Koule s uchy a Eulerův vzorec

Doc.$^{\text{MM}}$ Stanislav Basovník

Věta: Povrch koule bez ucha je povrch koule. Pokud povrch koule slepíme s plochou A, dostaneme opět plochu A.

Důkaz: Slepení provádíme sjednocením okrajů po vystřihnutí kruhů z obou ploch. Pokud z povrchu koule vystřihneme kruh, zůstane nám plocha, kterou lze spojitě zdeformovat na odstřihnutý kruh z plochy A. Z toho plyne, že přilepením povrchu koule na plochu A se plocha A nezmění.

Z předchozí věty plyne, že koule s jedním uchem, tedy plocha vzniklá slepením koule a anuloidu, je anuloid. Slepení koule a n anuloidů (koule s n uchy) je ekvivalentní se slepením koule s jedním uchem s $(n-1)$ anuloidy. Koule s jedním uchem je ovšem anuloid, takže koule s n uchy je ekvivalentní se slepením n anuloidů.

Eulerův vzorec: Nechť G je souvislý rovinný graf. V je počet jeho vrcholů, H počet hran a S počet stěn. Pak pro každý graf G platí ($V \geq 1$):

$$V + S - H = 2$$

Důkaz: Důkaz provedeme indukcí. Indukční předpoklad: Pokud $H = 0$, pak $V = 1$ a $S = 1$ (graf je souvislý). Eulerův vztah platí. Indukční krok: Rozlišíme dva případy:

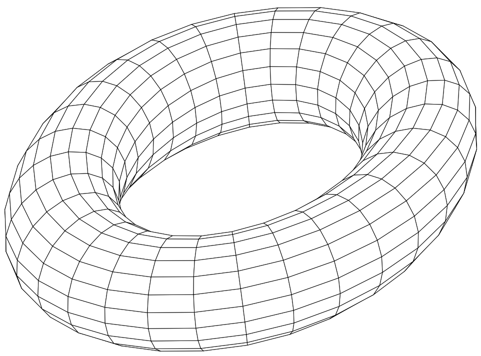
- Přidáme do grafu G strom, ale nezměníme počet stěn, tj. přidáme k vrcholů a k hran, počet stěn se nezmění. Platnost Eulerova vztahu se tím nezmění.
- Vytvoříme novou stěnu, a to tak, že přidáme do grafu strom, který připojíme dvěma hranami. Přidali jsme k vrcholů, $(k+1)$ hran a 1 stěnu. Dosazením do Eulerova vztahu ověříme, že jeho platnost se tímto nezmění.

Vyjdeme z indukčního předpokladu, na který opakovaně aplikujeme indukční krok. Tím dokážeme platnost Eulerova vztahu pro libovolný souvislý rovinný graf G.

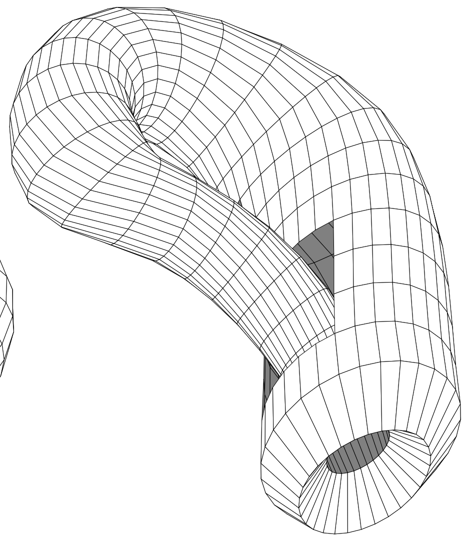
Pokud nakreslíme graf G na povrch koule s n uchy, Eulerovo číslo se může změnit. Leží-li nějaká ušní díra ve dvou různých stěnách (díra má dva otvory), pak tyto dvě stěny spojuje v jednu. Pro kouli s n uchy může Eulerovo číslo nabývat hodnot $(2-n)$, $(2-n+1)$, $\ldots$, 2 podle toho, jak nakreslíme vrcholy a hrany grafu.

Zajímavost na závěr

Z povrchu koule můžeme vytvořit jiné zajímavé plochy. Provedeme to tak, že na dvou místech vystřihneme dva nepřekrývající se kruhy a zbylé okraje po vystřihnutí sjednotíme. Máme několik možností sjednocení (viz obr. t1.1 a t1.2).



Obr. t1.1 – Anuloid

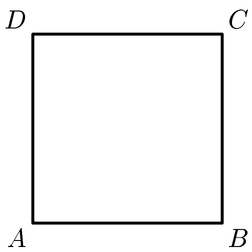


Obr. t1.2 – Kleinova láhev

U druhého případu jsme dvě kružnice sjednotili stejným způsobem, jako když vytváříme Möbiův proužek. Dostali jsme Kleinovu láhev. V ostatních případech máme anuloidy, tedy koule s jedním uchem.

Stejné plochy dostaneme, pokud budeme sjednocovat strany čtverce (možností je mnoho, ale uvedeme jen ty, které odpovídají předchozímu příkladu):

1) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ a $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ – vznikne anuloid,
2) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}$ a $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ – vznikne anuloid a
3) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}$ a $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}$ – vznikne Kleinova lahev.



Obr. t1.3

Šipky nad úsečkami znamenají, že spojujeme orientované úsečky.

Uvědomme si, že plochy 1) a 2) nejsou totožné. Pokud si označíme ve čtverci $ABCD$ osy x a y, nenajdeme spojitou deformaci mezi plochou 1) a 2) s ohledem na označení os. Odtud plyne, že osy x a y nemůžeme zaměňovat.

Pozn. red.: Zamyslete se nad následujícím problémem. Definujme sjednocení dvou shodných rovinných ploch A, B takto: Projde-li pohybující se hmotný bod *plochou A na straně α_1 (přičemž plocha A má strany α_1, α_2, plocha B strany β_1, β_2), objeví se na straně β_1 plochy B tak, že plochu A lze vhodnou translací a rotací převést na plochu B tak, že po průchodu bude vstupní bod v ploše A shodný s výstupním v ploše B. (Intuitivně – jde o klasický teleport.)*

Mějme v prostoru krychli, jejíž stěny označíme $\kappa_1, \ldots, \kappa_6$ tak, že součet indexů protějších stěn je vždy 7. Jakými způsoby můžeme sjednotit její stěny? Např. sjednotíme-li vnitřní stranu stěny κ_1 s vnitřní stranou stěny κ_6, získáme tak „nekonečný tunel", který však má konečný objem.

Sjednotíme-li vnitřní strany všech navzájem protějších stěn, získáme uvnitř krychle prostor, který nelze spojitě opustit. Pokud jste pozorovatelé uvnitř krychle řádově menší než strana, můžete procházet volně ve všech směrech, aniž by vás průchod hranou „rozřezal" (tj. výstupní části prošlé rozdílnými hranami by měly rozdílný směr rychlosti)? Kolik uvidíte obrazů sebe sama? Jak budou uspořádané?

Co když z tohoto stavu navíc při průchodu stěnami κ_1 a κ_6 vyjde po teleportaci pozorovatel zrcadlený (resp. převrácený podle středu stěny)? (Toto budeme dále označovat möbiovská stěna.) Bude do sebe pasovat šroubek s matičkou poté, co jedno z nich necháme projít möbiovskou stěnou? Nerozřízneme se o rozhraní möbiovské stěny a normální stěny?

Rozmyslete, co se stane, spojíme-li více stěn möbiovky (v různých kombinacích – třeba i stěnu samu na sebe) a zbylé necháme sjednocené „klasicky". Jak takovéto „vesmíry" uvidí pozorovatel zevnitř a jak se mu budou jevit hrany a vrcholy krychle? A co jiné mnohostěny namísto krychle (dvanáctistěn, osmistěn apod.)?

Irigi

Téma 2 – Logik

Řešení tohoto tématka nám přišlo poměrně mnoho. Někteří řešitelé však neměli zatím s algoritmy dostatek zkušeností. Mnozí pouze ukázali, jak hrají Logik doma při jedné konkrétní hře. To rozhodně nelze považovat za algoritmus. Pevně věřím, že se situace zlepší, až začínající řešitelé získají nějaké zkušenosti z našeho časopisu nebo ze soustředění, kde se algoritmům také věnujeme.

Úkolem bylo najít optimální strategii. Radek Beňo rozvedl v řešení svoji úvahu o tom, co se vlastně rozumí pojmem optimální strategie. Zjistil, že existují dvě možnosti výkladu:

1) taková strategie, při které je střední hodnota tahů do uhádnutí minimální;
2) taková strategie, při které je maximální počet tahů minimální.

Za zmínku stojí i to, jakým tahem by se mělo začínat. Tereza Pechová píše: „Nejvýhodnější pro hádajícího hráče je zvolit všechny barvy stejné." Takovýmto tahem začínala i většina ostatních řešitelů. Jiného názoru je ale Bc.[MM] Vlado Virčík, který takový tah považuje za poněkud nevhodný. Své tvrzení se pak dále pokusil dokázat, ale podařilo se mu to pouze pro $k = 2$ a $n < 5$. Nedokázal však rozhodnout, jaký tah by byl nejvhodnější pro obecné n.

Mnoho řešitelů se také poměrně nešťastně snažilo rozhodovat pomocí rozebírání velkého počtu případů nebo komplikovaných tabulek, kterými popsali i několik stránek. Já jsem spíše ocenil nějakou zajímavou myšlenku než množství popsaného papíru. Dle mého názoru nejobecnější a nejrychlejší algoritmus pro dvě barvy vymyslel Michal Takács. Pro více barev mě nejvíce zaujalo jednoduché a elegantní řešení Honzy Musílka, který si jako jeden z mála uvědomil, že náhodné tahy jsou někdy lepší než dotazování na velice podobné tipy. U tohoto řešení však není kvůli náhodě zaručeno, že bude efektivní ve všech případech.

Zajímavý příspěvek poslala také Mgr.MM Tereza Beránková. V úvodu velice poutavým způsobem popisuje domnělý původ hry Logik. Druhá část příspěvku, tedy samotné řešení úlohy, však už tolik zajímavá není. Rozhodl jsem se proto otisknout jen první část.

Chytrý nápad, aneb jak vše mohlo začít

Mgr.MM Tereza Beránková

Jak vlastně vznikla hra s názvem Master Mind (Logik)? Proč bychom její původ měli zařazovat až do 20. století a objev připsat na konto jakéhosi Mordecaie Meirowitze? Někdo se s takovýmto původem spokojí, ale MY ne. Pojďme se spolu podívat do dob před mnoha a mnoha lety. Do časů, kdy ještě neexistoval žádný matfyz, do minulosti, ve které lidé ještě nevěděli o úžasném spojení liščího ohonu a ebonitové tyče a kdy jedinou starostí člověka bylo mít co jíst, kde spát a vychovat celou řádku dětiček.

Doufám, že máte dobrou představivost a vidíte tento svět před očima. Takže vám do něj krásně zapadne malá chatrč, kterou obývá človíček Barni s rodinou. K chajdě ještě patří malé políčko, které živí celou domácnost. Jednoho krásného rána si Barni řekl, že je načase zasít semínka. Práce to byla úmorná, neměl traktor ani otroka. Ale nakonec zasel hrášek, obilí, ředkvičky a spoustu dalších druhů zeleniny, aby měli pestrou stravu. Po té namáhavé činnosti si šel odpočinout. Avšak když se probral, uviděl, jak se na políčko slétly vrány a všechna zrníčka snědly. Barni nešťastně vyběhl a ptactvo rozehnal, ale nebylo mu to už nic platné. Nedalo se nic dělat, musel zasít znovu. Na pokraji zhroucení se došoural domů a dopřál si pár hodinek spánku. Jen co se probudil, zjistil, že ptáčkové opět hodovali. No ale co teď? Barnimu nezbyla už žádná semínka. Musel proto dojít za lakomým sousedem Váňou a koupit si osivo na dluh. „Tentokrát už si dám záležet na tom, aby mi ti hloupí ptáci nesežrali moje zrní!“, pomyslel si Barni. Svázal několik větviček a vytvořil tak nad čerstvě osetým polem stříšku proti dravé zvěři. Ptáky skutečně mechanická ochrana udivila a odradila. Ne už tak tlustého souseda Váňu. Ten se naopak velice podivoval, co si to Barni vyrobil, a taky se ho hned zeptal. Důvtipný Barni nezaváhal ani okamžik a povídá: „Vymyslel jsem bezva hru. Tvým úkolem je uhodnout, co mám v kterém řádku za semínka. Řádků je 10 a druhů semínek 15 – ne všechna jsem použil. Máš 10 pokusů. Za každé správně přiřazené semínko k řádku dostaneš zlaťák, pokud uhodneš jen semínko, ale umístíš ho nesprávně, dostaneš stříbrňák. A tak to bude probíhat u každého pokusu. Pokud do deseti pokusů neuhodneš moji skladbu, vrátíš mi všechny vyhrané mince a navíc mi odpustíš dluh.“ Váňa bez váhání souhlasil. No a protože byl hloupý omezenec, tak prohrál.

Barnimu však úspěch stoupl do hlavy, tak zkoušel stejný trik na další omezené sousedy a postupně bohatl a bohatl … Až jednoho dne s ním hrál mladý Honza, který svým bystrým rozumem vymyslel metodu, jak vyhrát. Prozradil ji sousedům, kteří měli na Barniho pifku, a od té doby Barni chudl a chudl … Za pár dní měl zase jen malou chajdu, políčko se stříškou, pod kterou mu stejně nic nevyrostlo, protože kytičky potřebují světlo, a kupu hladových dětí.

Přešlo několik měsíců a osada na Barniho hru zapomněla s výjimkou Honzy, který ji předával z generace na generaci. No a tak se dostala až k Mordecaiovi Meirowitzimu, který ji oprášil, upravil a vydělal na ní jmění.

Takže poděkujme vránám za to, že máme toto krásné téma :)

Algoritmus pre dve farby

Mgr.^MM Michal Takács

Budeme používať iba červené a zelené farby kolíkov. Najprv zafarbíme všetky políčka na zeleno.

Teraz urobíme taký ťah, že prvé políčko zafarbíme na červeno (dáme červený kolík) a na zvyšné dáme zelené kolíky. Môžeme dostať 2 druhy informácií.

1) Počet čiernych kolíkov pribudne ⇒ na prvom políčku je červený kolík.
2) Počet čiernych kolíkov ubudne ⇒ na prvom políčku je zelený kolík.

Takýmto spôsobom môžeme preskúšať aj zvyšných $(n-1)$ políčok. Takto uhádneme kód po najviac $(n+1)$ ťahoch.

Tento spôsob sa však dá vylepšiť. Začiatok bude rovnaký – všetky políčka „zafarbíme“ nazeleno. Teraz dáme na prvé 2 políčka červené kolíky. Môžu nastať 3 prípady.

1) Počet čiernych kolíkov sa zvýši o 2 ⇒ na prvých 2 políčkach sú červené kolíky.
2) Počet čiernych kolíkov sa zníži o 2 ⇒ na prvých 2 políčkach sú zelené kolíky.
3) Počet čiernych kolíkov sa nezmenil ⇒ jedno z políčok je červené a druhé zelené.

Ak nastane prípad 1) alebo 2), tak máme jasno o prvom a druhom políčku, takže tak isto zafarbíme načerveno tretie a štvrté políčko (ostatné nazeleno), a ak dostaneme informáciu 1) alebo 2), tak pokračujeme zase ďalej … Čo však, keď nastane prípad 3)? V ďalšom ťahu zafarbíme 2. a 3. políčko načerveno (zvyšné nazeleno). Ak dostaneme informáciu 1) alebo 2), tak vieme farbu 2. a 3. políčka a tým pádom aj farbu 1. políčka (iná ako 2. políčka). Ak dostaneme informáciu 3), tak zafarbíme tretie a štvrté políčko … Zafarbujeme, až kým nedostaneme informáciu 1) alebo 2), potom vieme určiť aj farbu všetkých predošlých políčok. Ak až do konca nedôjdeme k informácii 1) alebo 2), tak vieme, že v danom úseku sa musia zelená a červená striedať, potom nám stačí zistiť farbu jedného z týchto políčok a ostatné tým máme určené.

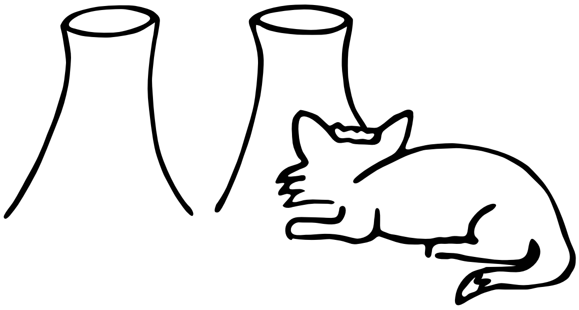
Ľahko si zrátame, že prinajhoršom (keď sa v celom poli farby striedajú) minieme $(n+1)$ ťahov. Zakaždým keď dostaneme informáciu 1) alebo 2), ušetríme ťah. Takže ak sú pri sebe dve rovnaké farby, ušetríme ťah. Na 2 políčkach môžu byť 2 farby umiestnené 4 spôsobmi. Teoreticky máme 50% šancu na ušetrenie ťahu.

Jirka D.

Téma 3 – Temelínské věže

Pozn. red.: Chtěl bych zpočátku vypíchnout dva příspěvky, které došly redakci. První je od Mgr.^{MM} Zuzky Safernové, která rozebírala geometrii kolem věžiček a druhý od Mgr.^{MM} Terky Beránkové, která nám poslala přímo model věžičky ze špejlí!

Dnes si povíme něco obecně o věžičkách. K tomu se nejlépe hodí „pohádka“ od Bc.^{MM} Marka Scholze.



Chladící věže

Bc.^{MM} Marek Scholz

Bylo, nebylo, chladící věže jsou symbolem jaderných i uhelných elektráren. Jsou to jistě nejmohutnější stavby elektrárenského komplexu. No ale neděje se v nich nic zvláštního.

Voda přicházející do věže má teplotu asi 30–35 °C. Ve spodku věže se voda rozstřikuje, nechává odkapávat či stéká po velkých deskách. Tím se dosahuje maximálního výparu, tedy i účinného chlazení. Pára a droboulinké kapičky, které z věže odcházejí, činí 1–2 % původního objemu vody, takže ztráty vlivem výparu nejsou nijak velké.

Voda ochlazená zhruba na teplotu vzduchu je svedena do trubek a putuje do kondenzátoru. Kondenzátor je zařízení, děvčata a chlapci, kde se ochlazuje a zkapalňuje ještě horká pára, která prošla turbínou. Horká pára kondenzuje na trubkách s chladící vodou. Ta se tím ohřeje zhruba o 10–15 °C. Takto ohřátá se pak zase vrací do chladící věže a uzavírá se tak koloběh. Průtok chladící vody je asi padesátkrát větší, než průtok zkondenzované vody, vznikající v kondenzátoru, takže pořádná porce.

No jo, ale proč jsou chladící věže tak mohutné obludy, když odpařování probíhá jen někde ve spodku?

Těmhle obludám se říká věže s přirozeným tahem a všechna ta betonová paráda je kvůli tomu, aby nad výparnou plochou dobře cirkuloval vzduch a byla efektivně odváděna pára. Pro menší výkony se nestaví věže, ale větráky. Když je ale potřeba každou minutu zchladit více než 800 m^3 vody, jak tomu je u elektrárenských věží, už se asi vyplatí postavit takový kolos.

Věže jsou tvaru rotačního hyperboloidu. Ale proč?

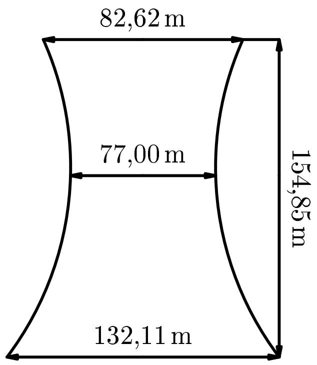
Napadá mě pár důvodů. Za prvé, jak bylo zmíněno v úvodu, ztráty výparem a únikem malinkatých kapiček jsou sice malé, ale jsou. Ztráty totiž musí být nahrazovány, a navíc se výparem zvyšuje obsah soli v koloběhu. 90 % ztrát však činí právě drobounké kapičky, které vlastně ani nepomohly k ochlazení kolující vody. Je tedy možné, že zúžení věže má kapičky zachytit, anebo má dokonce za úkol zkondenzovat část unikající páry.

K proudění vzduchu dochází jistě v důsledku rozdílu tlaků mezi spodkem věže a jejím vrcholem. V místě zúžení bude tedy vzduch proudit rychleji. Kdyby věž končila už v místě tohoto zúžení, mohl by vítr narušit plynulost proudění právě v místě, kde je nejrychlejší. Rozšíření na vrcholu věže navíc umožňuje rychlejší výměnu páry mezi věží a prostředím.

Druhá možnost je, že tvar věže je takto prostě nejstabilnější a stavaři nejsou nuceni dělat tak tlusté stěny a mohou komín vytáhnout pěkně do výšky.

Pozn. red.: Jeden z hlavních důvodů je opravdu kvůli jejich stavbě. Věže tvaru rotačního hyperboloidu mají tu výhodu, že na jejich stavbu lze používat ploché desky. Dříve se používaly i chladící věže tvaru válce.

Nyní se zaměříme trochu na tvar věží, respektive jejich matematický popis. Jak již bylo řečeno výše, věže mají tvar rotačního hyperboloidu, více o konkrétním tvaru věže citujme Mgr.[MM] Ondřeje Tkáče, který si pro popis věže převedl problém do roviny.



Obr. t3.1

Tvar skořepiny chladící věže je hyperbola:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} = 1\,,$$

kde

$$a = 38{,}5\,\mathrm{m} \qquad \text{a} \qquad b = 93{,}97\,\mathrm{m}$$

(viz obr. t3.1).

Dále si můžeme vypočítat excentricitu hyperboly

$$e = \sqrt{a^2 + b^2} = 101{,}5\,\mathrm{m}\,.$$

Pozn. red.: Nyní se opět vraťme k pohádce, kde se nám autor pokouší popsat stavbu věží.

Jak se to sakra staví? Tak nejdříve se postaví základní ocelový prstenec. Do prstence se upevnění tyče, které budou fungovat jako opora pro posuvné bednění. Posuvné bednění se sune po už vytvořené stěně nahoru, a beton se tudíž může lít nepřetržitě. Než bednění vysuneme nahoru, beton pod bedněním už stihnul ztuhnout. Bednění se posouvá buď vytáčením po závitové tyči nebo u větších staveb hydraulicky. Bednění je kolem dokola celé věže a někde na plošině pro pracovníky je čerpadlo pohánějící hydrauliku.

Když budu chtít válec vysunout nahoru, bednění zajistím k tyči a válec naopak uvolním. Válec začnu vypouštět, a tím se bude vysouvat nahoru. Pak válec zase zajistím a bednění uvolním. A můžu zase vesele dál hydraulicky tlačit bednění nahoru. Opěrné tyče se zabetonují, dají se však nastavovat. Věž je také vyztužena armaturovými pruty, které se kladou jednak do vodorovné polohy, jednak vertikálně. Jednotlivé pruty se k sobě svařují.

K tomu, aby byl na místo dopraven materiál, se používá šplhavý jeřáb, který je postaven uvnitř věže. Jeřáb pomocí ozubených kol nebo hydrauliky šplhá po ocelové konstrukci, kterou si sám zvyšuje tím, že na vršek usazuje další segmenty. Aby celá konstrukce nespadla, ukotvuje se lany ke vnitřku věže. Až stavba skončí, jeřáb se zase sám demontuje.

Rychlost posouvání bednění je 3–6 metrů za den, přičemž se pracuje celých 24 hodin denně na směny. Věž vysoká 155 metrů, jako ta v Temelíně, se staví asi 40 dnů, nepočítaje tedy stavbu základního prstence a všech možných věcí okolo. Na stavbě musí pracovat neustále nejméně 10 lidí. Kromě betonu, jehož cena činí cca 1 500 Kč/m^3, se musí zaplatit armatura, doprava materiálu, mzdy, musí se smontovat a demontovat bednění, jeřáb, … Cena věže jde do desítek milionů korun.

Na závěr ještě dodám, že chladící věže nejsou jen součástí elektráren, ale i chemiček, železáren a dalších průmyslových komplexů.

Pozn. red.: Dále bych rád dodal je několik málo upřesňujících faktů, které nám zaslala Mgr.^{MM} Terka Beránková. Jaderná elektrárna Temelín má čtyři chladící věže. Výška každé z nich je 154,8 metru, patní průměr činí 130,7 metru, průměr v koruně věže dělá 82,6 metru. Tloušťka pláště není konstantní a pohybuje se od 0,18 až po 0,9 metru. Hmotnost věže je 27 500 tun.

Nyní jsme si zhruba popsali, jak a k čemu slouží chladící věž. Ukázali jsme si matematický popis hyperboly. Příště bychom se mohli na geometrii věží zaměřit více, což je prostor pro vás, naše přispěvatele. Zkuste se zamyslet nad geometrickým tvarem věžiček, zkuste dát dohromady slova „geometrie“ a „věže“. Proč mají tvar právě rotačního hyperboloidu? Pokud vás geometrie zrovna nebaví a nazýváte se raději fyziky, pak zkuste popsat proudění vzduchu ve věži.

Hanss & Šáťa

Řešení úloh

Úloha 1.1 – Líný Mirek (5b)

Zadání:
Mirek dostal za úkol vyřešit následující úlohu: „Nalezněte všechna čtyřciferná čísla, která jsou rovna součtu čtverců svého prvního a druhého dvojčíslí." „To nemůžu spočítat, nemám u sebe kalkulačku ani tabulky a bez nich umím jen sčítat, odčítat, násobit a dělit taková přirozená čísla, že výsledek není větší než 200." Má Mirek pravdu, nebo se jen vymlouvá?

Řešení:
Úloha patří k těm, jejichž zadání není formulováno jednoznačně (na rozdíl od zadání typu „Dokažte, že …" nebo „Spočítejte obsah, když znáte …") a vyžaduje od řešitele jistou dávku intuice a odhadu (což je situace v běžném životě mnohem častější). Řešení pomocí počítače nebo násobením čísel pod sebou (kdy opravdu není třeba umět víc než malou násobilku) jsou jistě správně, ale žádné myšlenkové pochody, které od vás při řešení úloh očekáváme, při nich nebyly potřeba. Cílem úlohy tedy bylo, abyste pomocí úvah omezili velké množství možných kombinací dvojciferných čísel a bez dlouhého a úmorného počítání (Mirek je přece líný) došli ke správnému výsledku. Většina z vás to pochopila správně a vedle hlavní myšlenky využít rozkladu čísel na prvočinitele odvodili i další omezující podmínky. Nejčastěji jste našli podmínku pro cifru na místě stovek b a cifru na místě jednotek d hledaného čtyřciferného čísla

$$b^2 + d^2 \equiv d \pmod{10},$$

což znamená, že zbytek po dělení deseti je pro výrazy $b^2 + d^2$ a d stejný. To omezí b na číslice 0, 2, 8 a d pak nemůže být ani jedna z cifer 2, 4, 7, 9 (kvůli pozdějšímu odkazu si tuto podmínku nazvěme P_0). V následujícím řešení však postupujeme trochu jinak.

Označme první dvojčíslí hledaného čtyřciferného čísla X a druhé dvojčíslí Y. Úlohu, kterou má Mirek řešit, můžeme vyjádřit rovnicí

$$100X + Y = X^2 + Y^2 \tag{r1.1}$$

s podmínkou $X \geq 10$ (první cifra hledaného čísla musí být nenulová) a zřejmě tedy

$$10 \leq X \leq 99\,, \tag{r1.2}$$
$$0 \leq Y \leq 99\,. \tag{r1.3}$$

Snadno převedeme toto vyjádření do tvaru

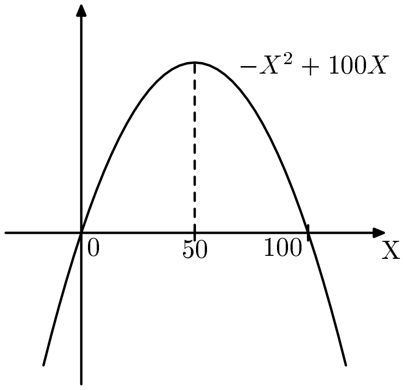
$$X(100 - X) = Y(Y - 1)\,. \qquad \text{(r1.4)}$$

Výraz na pravé straně je součinem dvou po sobě jdoucích přirozených čísel, proto je vždy sudý. Výraz vlevo musí být proto též sudý, a tedy X nebo $(100 - X)$ musí být sudé číslo. V obou případech jsou pak oba činitelé vlevo dělitelní dvěma, z čehož konečně plyne, že jeden z činitelů vpravo musí být dělitelný čtyřmi. Jinými slovy, aby měla rovnice (r1.1) řešení, musí být dělitelné čtyřmi buď Y nebo $(Y - 1)$ (tuto podmínku existence řešení označme jako P_1).

Výraz na levé straně (r1.4) můžeme ovšem též chápat jako kvadratickou funkci bez absolutního členu se záporným koeficientem u nejvyšší mocniny

$$f(X) = X(100 - X)\,. \qquad \text{(r1.5)}$$

Ze střední školy víme, že příslušná kvadratická rovnice $-X^2 + 100X = 0$ má kořeny 0 a 100 a grafem této funkce je parabola protínající osu X v bodech 0 a 100 (náčrt průběhu této funkce na obr. r1.1).



Obr. r1.1

I Mirek určitě ví, že každá parabola je osově symetrická podle osy procházející vrcholem, kde má kvadratická funkce maximum nebo minimum (podle znaménka u kvadratického členu). V našem případě se jedná o maximum v bodě $X = 50$ (všimněte si, že dosud jsme nepotřebovali vědět nic o hodnotách funkce (r1.5) v konkrétních bodech X, kromě zřejmých bodů 0 a 100 a jejich aritmetického průměru pro nalezení maxima). Omezme se nyní na chvíli na uzavřený interval $\langle 10, 90\rangle$, který je symetrický kolem bodu 50. Ze symetrie paraboly plyne, že pro každé $X_1 \in \langle 10, 50\rangle$ existuje $X_2 \in \langle 50, 90\rangle$ tak, že funkce (r1.5) nabývá v X_1 a X_2 stejné hodnoty. Pro řešení (r1.4) na $\langle 10, 90\rangle$ tedy stačí uvažovat hodnoty levé strany na $\langle 10, 50\rangle$, kde je funkce (5) rostoucí s nejmenší hodnotou v bodě $X = 10$. Na tomto intervalu můžeme psát

$$X(100 - X) \geq 10 \cdot 90 = 2 \cdot 5 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 = (2 \cdot 3 \cdot 5)^2 = 30^2\,,$$

tudíž pro $Y > 0$ je

$$Y^2 > Y(Y - 1) = X(100 - X) \geq 30^2\,.$$

Dostali jsme další omezení na druhé dvojčíslí $Y > 30$ (podmínka P_2).

Kvadratická funkce (r1.5) má maximum v bodě 50, takže

$$Y(Y - 1) = X(X - 100) \leq 50 \cdot 50 = 50^2$$

$\mathbf{Y}$	33	36	37	40	41
$\mathbf{Y-1}$	32	35	36	39	40
$\mathbf{Y(Y-1)/4}$	$2^3 \cdot 3 \cdot 11$	$3^2 \cdot 5 \cdot 7$	$3^2 \cdot 37$	$2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 13$	$2 \cdot 5 \cdot 41$

$\mathbf{Y}$	44	45	48	49
$\mathbf{Y-1}$	43	44	47	48
$\mathbf{Y(Y-1)/4}$	$11 \cdot 43$	$3^2 \cdot 5 \cdot 11$	$2^2 \cdot 3 \cdot 47$	$2^2 \cdot 3 \cdot 7^2$

Tabulka r1.1

a podmínka P_3 na Y je $Y \leq 50$ (opět stojí za zmínku, že v obou odvozených nerovnostech jsme použili vědomosti, které má i Mirek).

Pro $X \in \langle 10, 90 \rangle$ dostáváme z podmínek P_1, P_2 a P_3 tabulku r1.1 možných hodnot Y, $Y-1$ a příslušný rozklad na prvočinitele. Vhodným „přeskládáním" je třeba nalézt součin dvou činitelů tak, aby jejich součet byl roven 100.

Rovnici (r1.4) můžeme upravit do tvaru

$$\frac{X}{2}\left(50 - \frac{X}{2}\right) = \frac{1}{4} Y(Y-1)$$

a substitucí $Z = X/2$ je

$$Z(50 - Z) = \frac{1}{4} Y(Y-1)\,.$$

Rozklad součinu $Y(Y-1)$ vydělíme 4 a zbylý součin (poslední řádek tabulky) se pokoušíme rozložit na dva činitele, jejichž součet je 50. To se podaří jen v případě $Y = 33$:

$$\frac{Y(Y-1)}{4} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 11 = (2 \cdot 3) \cdot (2 \cdot 2 \cdot 11) = 6 \cdot 44\,.$$

Pro X příslušné k $Y = 33$ tak dostáváme dvě možnosti $X = 12$ a $X = 88$.

Zbývá se vrátit k případu $X \in \langle 91, 99 \rangle$. V tomto případě stačí vzhledem k textu před podmínkou P_1 uvažovat sudá X a z rozkladu výrazu $X(100 - X)$ vytvořit součin dvou po sobě jdoucích činitelů $Y(Y-1)$. Sami se snadno přesvědčíte, že ani jedno z čísel 92, 94, 96, 98 tuto vlastnost nemá a úloha nemá žádné další řešení.

V předchozím jsme se záměrně vyhnuli použití podmínky P_0 (vyžaduje použití poznatku, že libovolný celý násobek 1000 je dělitelný 10), ale v posledních dvou krocích bychom díky ní mohli vyloučit z „okruhu podezřelých" čísla $Y \in \{37, 44, 49\}$ a $X \in \{92, 94\}$, čímž by se nepříjemné rozklady na prvočinitele redukovaly na 8 případů.

Jak jsme názorně předvedli, Mirek je schopen úlohu vyřešit i se svými (poněkud omezenými) schopnostmi, a tudíž se vymlouvá.

Mirek

Úloha 1.2 – Kočárek (5b)

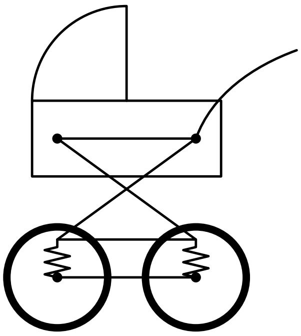
Zadání:

Po polní cestě jel pásový traktor a nechal tam zářezy v hlíně vzdálené od sebe 30 cm.

Pak po této cestě tlačím dětský kočárek odpružený čtyřmi pružinami (dvě vpředu a dvě vzadu). Každá z nich se při zatížení 1 kg *zkrátí o 2* cm. *Vzdálenost os koleček kočárku je 75* cm. *Hmotnost houpající se části kočárku je 10* kg *a její těžiště leží 40* cm *nad středem spojnice horních konců pružin.*

Jak rychle mám jet, aby se kočárek co nejvíce houpal?

Pokud vám chybí nějaké další parametry, inspirujte se obrázkem, nebo si rozumné hodnoty domyslete.



Řešení:

Na kočárek, který pojede po cestě konstantní rychlostí, budou periodicky působit nárazy způsobené projetím zářezu. Rozebrat přesné působení takovéhoto „drcnutí“ je velmi složité. Nám ale bude stačit fakt, že toto působení nezávisí příliš na rychlosti kočárku (alespoň v rychlostech, které tady připadají v úvahu). Na kočárek tedy působí síla, která se periodicky mění.

Když se podíváme na zadané hodnoty, vidíme, že zadní a přední kolečka projíždí zářezy „střídavě“. Jinak řečeno, doba, která uplyne od nárazu na přední kolečka do následujícího nárazu na zadní kolečka, je stejná jako doba, která uplyne od nárazu na zadní kolečka do následujícího nárazu na přední.

Vraťme se k samotnému houpání kočárku. Když se kočárek houpe, koná určitý periodický pohyb. Kočárek má, stejně jako jakýkoliv jiný oscilátor, svou *vlastní frekvenci*, se kterou by se houpal, kdybychom jej rozhoupali a pak nechali být. Pokud budeme kočárek rozhoupávat nárazy na zářezy v hlíně, bude se mu výše zmíněná síla snažit „vnutit“ svoji frekvenci (která samozřejmě odpovídá frekvenci, se kterou kočárek přejíždí zářezy). Je poměrně zřejmé (a kdo tomu nevěří, ten si to může najít v nějaké učebnici fyziky), že rozhoupávání bude nejúčinnější tehdy, když bude budící síla *v rezonanci* – tedy bude mít stejnou frekvenci, jako je vlastní frekvence kočárku.

Musíme tedy najít takovou rychlost pohybu kočárku, aby frekvence nárazů na zářezy v hlíně byla stejná jako vlastní frekvence kočárku.

Ale nesmíme zapomenout na rozdíl mezi předními a zadními kolečky. Působení na přední a na zadní kolečka lze v jistém smyslu považovat za „opačné“.

Nicméně kočárek, jak už bylo výše zmíněno, mezi nárazem předních a zadních koleček stihne právě polovinu celého zhoupnutí. Tedy i sám kočárek se dostane do situace, která je ve stejném smyslu „opačná“. Z toho plyne, že stačí najít takovou rychlost, aby frekvence nárazů předních koleček byla stejná jako vlastní frekvence houpání kočárku. Zadní kolečka už pak budou nutně houpání podporovat stejným způsobem jako ta přední.

Pro přehlednost si vzdálenost zářezů označíme $d = 30\,\mathrm{cm}$, vzdálenost os koleček $l = 75\,\mathrm{cm}$, výšku těžiště $h = 40\,\mathrm{cm}$ a hmotnost houpající se části $m = 10\,\mathrm{kg}$.

Kočárek jedoucí rychlostí v naráží předními kolečky na zářezy s frekvencí

$$f = \frac{v}{d}\,. \tag{r2.1}$$

Vlastní frekvenci houpání kočárku spočítáme analogicky, jako vlastní frekvenci lineárních kmitů (například pružiny zatížené závažím). Jen je třeba pamatovat na to, že kočárek se kývá, tedy na rozdíl od pružiny se závažím vykonává otáčivý pohyb (a budeme tedy muset počítat s momenty).

Za bod, kolem kterého se kočárek otáčí, budeme považovat střed spojnice vršků pružin. Polohu kočárku určíme úhlem α, o který se tato spojnice vychýlí z klidové polohy. Z toho plyne, že pružiny jsou pak zkráceny (resp. prodlouženy) o délku

$$\Delta x = \frac{\alpha l}{2}\,, \tag{r2.2}$$

kde úhel α je v radiánech. (Tento vztah vychází z předpokladu, že výchylka bude dostatečně malá a místo $\sin\alpha$ stačí použít jen α. To zde zřejmě platí – kočárek se určitě nevychýlí o více než několik stupňů.)

Každá pružina má tuhost k ($k = 10\,\mathrm{N}/2\,\mathrm{cm} = 500\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$). Všechny pružiny (jak ty zkrácené, tak ty protažené) působí proti výchylce. A to celkovým momentem síly

$$M = -4k\,\frac{l}{2}\,\Delta x = -\alpha k l^2\,. \tag{r2.3}$$

Tento moment uděluje kočárku úhlové zrychlení. O tom mluví druhá impulsová věta, a hledaný vztah je

$$\varepsilon = -\frac{\alpha k l^2}{J}\,, \tag{r2.4}$$

kde ε je úhlové zrychlení a J moment setrvačnosti houpající se části.

Další potřebný vztah bohužel nelze rozumně odvodit bez znalosti derivací. Pokud tedy derivovat neumíte, nezbývá vám, než závěrům dalšího odstavce věřit.[2]

[2] Úlohu ale samozřejmě šlo řešit i bez znalosti derivace. Najděte si nějakou učebnici fyziky nebo váš sešit a určitě tam najdete vzorec, který je velmi podobný vztahu (r2.8). Pak už jen stačí trochu uvažovat, využít analogie.

Úhlové zrychlení kočárku je druhá derivace úhlu α podle času (obvykle se značí $\ddot{\alpha}$). Pak lze rovnici (r2.4) přepsat jako

$$\ddot{\alpha}(t) = -\frac{kl^2}{J}\,\alpha(t)\,. \tag{r2.5}$$

Výchylku tedy chápeme jako funkci času $\alpha(t)$. Teď hledáme takovou funkci, která se bude po dvojím zderivování lišit jen o zápornou konstantu (konkrétně $-kl^2/J$). To splňují funkce sinus a kosinus. Pro naše účely (nezajímá nás fáze kmitů, jen jejich frekvence) bude stačit předpokládat řešení ve tvaru

$$\alpha(t) = A\sin(Bt)\,. \tag{r2.6}$$

Po zderivování a dosazením do (r2.5) získáme podmínku pro B:

$$B = \sqrt{\frac{kl^2}{J}}\,. \tag{r2.7}$$

Jedno zhoupnutí kočárku probíhá v době, kdy $Bt \in \langle 0, 2\pi\rangle$. Z toho už jednoduše určíme frekvenci vlastních kmitů

$$f_{\mathrm{vl}} = \frac{B}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kl^2}{J}}\,. \tag{r2.8}$$

Vzpomeneme si na vztah (r2.1), a spolu s (r2.8) nám dá výraz pro hledanou rychlost

$$v = \frac{dl}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{J}}\,. \tag{r2.9}$$

Zbývá určit moment setrvačnosti J. Pro tento účel budeme celou houpající se část považovat za homogenní kvádr o délce l a výšce b s těžištěm v místě uvedeném v zadání. Moment setrvačnosti kvádru vůči ose procházející těžištěm je

$$J_0 = \frac{1}{12}\,m(l^2 + b^2)\,, \tag{r2.10}$$

jak lze zjistit například v tabulkách. Osa otáčení ale leží ve vzdálenosti h od těžiště kvádru, takže výsledný moment setrvačnosti určíme pomocí Steinerovy věty:

$$J = mh^2 + J_0 = m\left(h^2 + \frac{l^2 + b^2}{12}\right)\,. \tag{r2.11}$$

Vidíme, že moment setrvačnosti je z velké části určen výškou těžiště h a zjednodušení tvaru kývající se části výsledek pravděpodobně ovlivní pouze v rozumné míře. Za b dosadíme odhadnutou hodnotu 40 cm a další hodnoty jsou v zadání. Vychází moment setrvačnosti

$$J = 2{,}2\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\,.$$

Lze předpokládat,[3] že takto určené J bude mít chybu pod 20 %. To je sice na první pohled hodně, ale uvědomme si, s jakou přesností máme zadány rozměry a hmotnost kočárku. A už ze zadání úlohy je vidět, že přesnější výsledek ani nemá velký význam (jak přesně vnímáte rychlost chůze?).

Po dosazení do (r2.9) vyjde

$$v = 0{,}54\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = 2\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}\,.$$

Kočárek tedy musíme tlačit velmi pomalým procházkovým tempem. `:-)`

Marble

Úloha 1.3 – Piráti (4b)

Zadání:

Pět pirátů našlo truhličku se 100 zlaťáky. Po chvíli dohadů o tom, komu patří větší část pokladu, kapitán rozhodl: „Uděláme to spravedlivě. Já navrhnu, jak si zlaťáky rozdělíme. Pokud s tím bude souhlasit nadpoloviční většina z nás, podělíme se tak. Pokud ne, můžete mě zastřelit a místo mě bude rozdělovat můj první zástupce. A tak dále, vždy bude dělit ten s nejvyšší hodností. Do té doby, než bude některé dělení odsouhlaseno a nebo dokud nezbude poslední z vás. Pokud někdo poruší pravidla, bude okamžitě zastřelen.“

Pirátům to přišlo velmi výhodné. Kapitán bude rád, jestli přežije, a my si pořádně přilepšíme. Tak rychle souhlasili. Kapitán navrhl rozdělení peněz a piráti se konečně pořádně zamysleli. Ono to asi nepůjde tak jednoduše …

Jak nakonec dopadlo dělení pokladu? Předpokládáme, že:

- *všichni piráti jsou chytří a to, jak budou hlasovat, si pořádně promyslí;*
- *každý pirát chce především přežít;*
- *když přežije, tak s co nejvíce zlaťáky v kapse;*
- *pokud tím nic neztratí, snaží se, aby bylo zastřeleno co nejvíc ostatních pirátů (obzvlášť ten protivný kapitán).*

Piráti sice dodrží kapitánova pravidla, ale jinak si naprosto nedůvěřují, takže žádné další dohody nepřipadají v úvahu.

A dvě otázky navíc. Jak by vše dopadlo, kdyby bylo pirátů víc než pět? Co by se stalo, kdyby v truhle byl jen jediný zlaťák?

Řešení:

Jednoduchoulinkatou úložku snadno a názorně vyřeším od nejmenších případů nahoru. Piráty očísluji 1, 2, … od nejpodřadnějších hodností (uhlíř, palubní teoretický fyzik, otrok, …) přes kapitána až po samotného Diskrétního Matematika.

V_1 : Pro jednoho piráta je situace triviální.

$V_{Až}$: Dále se pirát rozhodne podle největšího menšího přijatého rozdělení, pokud dostane víc než tehdy nebo pokud by další rozdělení nepřežil, bude pro.

2) Dva piráti se neshodnou a PTF (2. pirát) ostrouhá.
3) Třetí pirát má jistou spolupráci od PTF, takže si nechá vše pro sebe.

---

[3] Můžete si to ověřit například dosazením jiných rozměrů nebo jiných tvarů do (r2.11).

4) Čtvrtý nemůže počítat s podporou 3., takže musí přesvědčit 1. a 2. Těm stačí po jednom zlaťáčku, od dalšího na řadě by nedostali nic. Nechá si tedy 98 sluníček.
5) Pátý pirát (kapitán) neuplatí 4., rád však podstrčí třetímu 1 šušník, buď 1. anebo 2. pak nerad ale přece uplatí 2 dukátky. Sám si jen a jen pro sebe nechá celoučkých celičkých 97 kulaťoučkých miláčků.

Situace s 1 zl se řeší podle stejného pravidla, při třech si stále ještě nahrabe rozdělující, ale čtvrtý nepřežije, neuplatí si zároveň 1. a 2. Pátý sice také uplatí jen jednoho piráta (1. nebo 2.), ale má navíc podporu 4.

Dále to je celkem jednoduché, další uplatí jednoho piráta a potřebuje dostatek beznadějných uzoufaných zoufalců. Dost jich má pirát 9 (jsou pro něj i piráti číslo 6–8), 17, 33, 65, $\ldots$, $(2^k + 1)$. Důkazuchtiví prosím užijte Matematickou Indukci.

Pro více pirátů a 100 gp je zadání trochu nejasné. Je třeba si vybrat, jak se pirát zachová, pokud si není jistý, kolik v dalším výběru dostane – může chtít více než to, co má jisté, nebo než to, co by mohl dostat (třeba pirát 1 při návrhu piráta 6 neví, jestli by od 5. dostal jednu nebo žádnou mincičku). Jsou možné i další způsoby, například podle pravděpodobnosti nebo předpokládat, že dělící pirát raději vyplatí piráty s nižšší hodností.

Tomáš G.

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Beránková	22	5		4		6	7	22	22
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Takács	25	5		4		7		16	16
3–5.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Perešíni	59	5		4	6			15	15
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Safernová	31	5					10	15	15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Vlado Virčík	15	4	2	3		6		15	15
6–7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	73	4		2		7		13	13
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jaroslav Hančl	13	5		4		4		13	13
8–10.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Roman Derco	11	4	3	4				11	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Radim Pechal	11	5	2	4				11	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Ján Pich	11	5	2	4				11	11
11–13.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jindřich Soukup	59	5		5				10	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Marek Scholz	18						10	10	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Hlavatý	10	2	4	4				10	10
14–19.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	100	5		4				9	9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kubáň	43			4		5		9	9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpánka Mohylová	35	5		4				9	9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Bedřich Roskovec	33	5		4				9	9
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Kateřina Böhmová	26	5		4				9	9
	Jan Rygl	9	5		4				9	9
20–22.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Monika Martinisková	24	1	1		3		3	8	8
	Zdeněk Jaroň	8		4	4				8	8
	Radim Vansa	8	3	1	4				8	8
23–28.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ondřej Tkáč	24	1		2			4	7	7
	Veronika Bachratá	7	4		3				7	7
	Radek Beňo	7	1		3		3		7	7
	Marie Kolářová	7	5		2				7	7
	Matěj Korvas	7		3			4		7	7
	Robert Roreitner	7	3	2	2				7	7
29–32.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Stanislav Basovník	131				6			6	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Greškovič	39		2	4				6	6
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petra Malá	35	3		3				6	6
	Petr Smital	6	4		2				6	6
33–34.	Tereza Pechová	8	1		2		2		5	5
	Marian Vráblik	5	1		3		1		5	5

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
35–43.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Studničná	110			4				4	4
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ František Konopecký	31			4				4	4
	Jan Konopásek	4			4				4	4
	Martin Křivánek	4			4				4	4
	Jakub Opršal	4			4				4	4
	Alžběta Pechová	4	1		1		2		4	4
	Aleš Podolník	4	2		2				4	4
	Kristýna Stodolová	4			4				4	4
	Martin Všetička	4	4						4	4
44–45.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	61			3				3	3
	Kateřina Zuzaňáková	3			3				3	3
46–47.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Morávek	17			2				2	2
	Lucie Mikšíková	2	1		1				2	2
48–50.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ľuboš Uličný	36			1				1	1
	Martin Berka	1			1				1	1
	Jaroslav Žák	1			1				1	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.