Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník X **číslo 7**

Milí řešitelé,

konečně se vám dostává do rukou sedmé, závěrečné číslo desátého ročníku. Najdete zde řešení úloh z pátého a šestého čísla. Také zde uveřejňujeme poslední příspěvky k tématkům desátého ročníku.

Na posledních stránkách je uvedena výsledková listina za páté a šesté číslo. K celkovému počtu bodů získaných v M&M dostali někteří z vás navíc body za příspěvky do konferencí. Tyto body neovlivňují pořadí v desátém ročníku, ale mají vliv na titul, který dotyčným řešitelům patří.

Redakce M&M

Řešení témat

Téma 2 – n-rozměrné prostory

Některé vztahy pro n-simplex

Dr.[MM] Zbyněk Konečný

V následujícím se pokusím dokázat vzorec pro výšku n-simplexu[1] v_n, poloměr koule mu vepsané r_n a opsané R_n (index značí rozměr n-simplexu). Vím, že výška n-simplexu splývá s těžnicí, prochází tedy těžištěm jedné ze stěn, toto těžiště leží v $1/(n+1)$ její výšky.

Pozn. red.: Pro 2-simplex, což je rovnostranný trojúhelník, je těžiště v jedné třetině výšky, pro pravidelný čtyřstěn (tj. 3-simplex) je těžiště v jedné čtvrtině výšky a tak dál. Čtenář znalý integrování si toto tvrzení lehko odvodí.

Proto výška n-simplexu, výška jeho stěny (tedy výška $(n-1)$-simplexu) a $1/n$ výšky $(n-1)$-simplexu tvoří pravoúhlý trojúhelník. Podle Pythagorovy věty $v_n^2 = v_{n-1}^2 - (v_{n-1}/n)^2 = v_{n-1}^2(1 - 1/n^2)$, po odmocnění

$$v_n = v_{n-1}\frac{\sqrt{n^2-1}}{n} = v_{n-2}\frac{\sqrt{(n-1)(n+1)}}{n}\,\frac{\sqrt{(n-2)n}}{n-1} = \ldots =$$
$$= v_2\frac{\sqrt{(n-1)!\,(n+1)!/6}}{n!/2} = 2v_2\frac{\sqrt{n!\,n!\,((n+1)/(6n))}}{n!} = 2v_2\sqrt{\frac{n+1}{6n}}\,.$$

[1] *Pozn. red.: Autor má na mysli pravidelný n-simplex, což je těleso v n-rozměrném prostoru, které má $n+1$ vrcholů a stěny jsou $(n-1)$-simplexy.*

Jelikož výška rovnostranného trojúhelníka je $v_2 = a\sqrt{3}/2$, je

$$v_n = \frac{2\sqrt{3}}{2}\, a \sqrt{\frac{n+1}{6n}} = a \sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,.$$

Poloměr koule n-simplexu vepsané je roven části těžnice spojující těžiště a stěnu, kterou protíná, tedy $r_n = v_n/(n+1) = a/\sqrt{2n(n+1)}$. Poloměr koule opsané je vzdálenost těžiště od vrcholu, tedy $R_n + r_n = v_n$, po dosazení $R_n = a\sqrt{n/(2(n+1))}$.

Peťo

Téma 6 – Grafika

Dr.^MM^ Zbyněk Konečný nám poslal příspěvek, ve kterém se zabývá problémem obecných obalových křivek.

Obalové křivky

Dr.^MM^ Zbyněk Konečný

Obalové křivky vznikají tak, že na dvou definovaných čarách a, b zvolím body $A \in a$, $B \in b$ tak, že poloha A na a a poloha B na b jsou dány dvěma funkcemi nějakého reálného parametru t. Změnou tohoto parametru se spojnice AB spojitě pohybuje a vyplňuje tak postupně nějakou část roviny, která je ohraničena obalovou křivkou. Budu se zabývat pouze nejjednodušší variantou, kdy a a b jsou přímky.

Přímky a a b jsou na sebe kolmé

Dvojici spojovaných bodů umístím tak, že na přímce a (ose y) bude daný bod A mít souřadnici $y = f(t)$, na přímce b (ose x) bude mít bod B souřadnici $x = g(t)$. Rovnice tečny dané těmito dvěma body tedy je

$$y = f(t) - \frac{f(t)}{g(t)}\, x\,,$$

pro soumeznou tečnu platí

$$y = f(t+\Delta t) - \frac{f(t+\Delta t)}{g(t+\Delta t)}\, x\,.$$

Jejich průsečík je bodem hledané křivky a platí pro něj rovnice

$$f(t) - \frac{f(t)}{g(t)}\, x = f(t+\Delta t) - \frac{f(t+\Delta t)}{g(t+\Delta t)}\, x\,.$$

Pro x při $\Delta t \to 0$ platí[2]

$$x = \frac{f(t+\Delta t) - f(t)}{g(t)f(t+\Delta t) - g(t+\Delta t)f(t)}\, g(t+\Delta t)g(t) = \frac{g(t)^2 f'(t)}{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}\,.$$

Pro y získám vztah

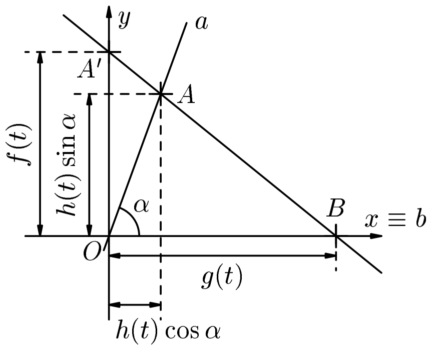
$$y = \frac{f(t)^2 g'(t)}{f(t)g'(t) - f'(t)g(t)}\,.$$

Znám tedy parametrické vyjádření dané křivky, a z něj pro zvolené $f(t)$, $g(t)$ mohu určit klasický vzorec.

Přímky a a b svírají kosý úhel

Tuto úlohu je možné převést na předešlý případ. Úhel, který svírají přímky a a b, nazvu α, vzdálenost $OA = h(t)$, $OB = g(t)$. Určím souřadnici $y = f(t)$ bodu A', ve kterém osu y protíná pohyblivá přímka AB. Z podobnosti trojúhelníků platí podle náčrtku t6.1

$$\frac{f(t)}{g(t)} = \frac{h(t)\sin\alpha}{g(t) - h(t)\cos\alpha}\,,$$
$$f(t) = \frac{g(t)\,h(t)\sin\alpha}{g(t) - h(t)\cos\alpha}\,.$$



Obr. t6.1

Příklady

K obecným úvahám doplním dva příklady

a) $f(t) = 1/t$, $g(t) = t$

Příslušné derivace jsou $f'(t) = -1/t^2$ a $g'(t) = 1$. Pro body křivky platí

$$x = \frac{t^2 \cdot (-1/t^2)}{(-1/t^2)\cdot t - (1/t)\cdot 1} = \frac{t}{2}\,,$$
$$y = \frac{(1/t^2)\cdot 1}{(1/t)\cdot 1 - (-1/t^2)\cdot t} = \frac{1}{2t}\,.$$

Po vyloučení t vyjde rovnice $4xy = 1$. Obalová křivka je *hyperbola*.

[2] *Pozn. red.: Pokud vám není jasné, kde se tam vzala derivace, uvědomte si, že platí* $f'(x) = \lim_{\xi\to 0}[f(x+\xi) - f(x)]/\xi$. *Autor navíc při úpravách nahradil součin* $g(t+\Delta t)g(t)$ *výrazem* $g(t)^2$, *což je v tomto případě (za předpokladu konečné derivace funkce* g*) korektní.*

b) $f(t) = k \sin t$, $g(t) = l \cos t$

Pro derivace funkcí f a g platí $f'(t) = k \cos t$, $g'(t) = -l \sin t$.

$$x = \frac{l^2 \cos^2(t) \cdot k \cos(t)}{kl \cos^2(t) + kl \sin^2(t)} = l \cos^3(t)\,,$$
$$y = \frac{k^2 \sin^2(t) \cdot l \sin(t)}{kl \cos^2(t) - kl \sin^2(t)} = k \sin^3(t)\,.$$

Po vyloučení parametru t (vyjdu z rovnice $cos^2(t) + sin^2(t) = 1$) získám rovnici obalové křivky:

$$(x/l)^{2/3} + (y/k)^{2/3} = 1\,.$$

Pro $k = l$ bude délka úsečky mezi přímkami a a b konstantní. Obalová křivka vzniklá pohybem této úsečky bude mít po malé úpravě rovnici

$$x^{2/3} + y^{2/3} = k^{2/3}\,.$$

Je to *asteroida.*

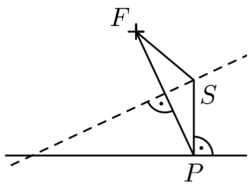
Konstrukce paraboly

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jindra Soukup

Pozn. red.: Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jindra Soukup nám poslal článek k problému zmíněnému v minulém čísle – konstrukci paraboly překládáním papíru.

List papíru překládáme tak, aby se hrana vždy dotkla pevně zvoleného bodu. Jednotlivé přehyby pak vytváří lomenou čáru, která se „blíží parabole“. (Lépe řečeno, každý takový přehyb je tečnou vznikající paraboly.)

Při zjišťování, je-li vznikající křivka parabola, vyjdeme z definice paraboly. Jako ohnisko F si označím zvolený bod. Řídící přímkou q bude daný okraj papíru. Každým přehnutím vznikne přímka, která je osou spojnice bodu F a přikládaného bodu P. Z bodu P vedeme kolmici na q. Její průsečík s přehybem, který označím S, bude hledaný bod paraboly, protože $|FS| = |SP|$ (což plyne třeba z podobnosti trojúhelníků – viz obrázek t6.2). Pokud bychom za P postupně dosadili všechny body přímky q, dostali bychom parabolu.



Obr. t6.2

Dosud jsme ale předpokládali, že bod S je nejvzdálenější od okraje a že konstrukcí nemůže vzniknout bod S'; $S' \in \leftrightarrow PS$, $|PS'| > |PS|$.

To, že takový bod neexistuje, ale můžeme dokázat.[3] Zavedeme si souřadnicovou soustavu s osou x totožnou s q a osou y umístěnou tak, aby na ní ležel

[3] *Pozn. red.: Důkaz byl kvůli drobným nedostakům originální verze redakcí mírně upraven.*

bod F. Ohnisko F má tedy souřadnice $[0, f]$ a zvolenný bod P souřadnice $[p, 0]$. Jednoduše dopočteme, že hledaný bod S bude mít souřadnice

$$\left[p, \frac{f^2 + p^2}{2f}\right].$$

Ohyb papíru vytvořený přiložením jiného bodu $P'[q, 0]$ bude procházet i bodem se souřadnicemi

$$\left[p, \frac{f^2 + 2pq - q^2}{2f}\right].$$

Získáme tedy následující nerovnice

$$\frac{f^2 + p^2}{2f} \geq \frac{f^2 + 2pq - q^2}{2f},$$

$$p^2 \geq 2pq - q^2,$$

$$(p - q)^2 \geq 0.$$

Poslední nerovnost platí pro libovolné q, takže jsme dokázali, že na výsledné křivce se podílí právě ty body, které dohromady tvoří parabolu.

Marble

Řešení úloh

Úloha 5.1 – Čtvercová čísla (5b)

Zadání:

Přirozené číslo nazveme čtvercovým, jestliže je jeho druhá odmocnina přirozené číslo. Nalezněte trojici přirozených čísel $\{x, y, z\}$ takovou, že každý z výrazů

$$z^2 + y^2 + x^2 + x + y + z, \quad y^2 + x^2 + x + y + z \quad a \quad x^2 + x + y + z$$

je čtvercovým číslem a přitom x je nejmenší možné!

Řešení:

Při zadávání této úlohy jsem se nechal inspirovat úlohou z poslední části spisu *Liber quadratorum* Leonarda Pisánského známějšího pod jménem Fibonacci (podrobněji viz J. Bečvář a kol.: Matematika ve středověké Evropě; Prometheus, Praha 2001, strana 310). Netušil jsem ale, jaké problémy vzniknou dodatečně přidanou podmínkou minimálního x. Úloha se tím natolik zkomplikovala, že se mně ani s pomocí výpočetní techniky nepodařilo najít úplné řešení. Trojici s nejmenším zatím nalezeným x našel Zbyněk Konečný, jsou to čísla $x = 4$, $y = 112$, $z = 4224$. Ani on, ani nikdo jiný ale nedokázal, že žádná trojice $[x, y, z]$, kde $x \in \{1, 2, 3\}$, neexistuje. Někteří jste si správně všimli, že pro každé $a \in \mathbb{Z}$ je výraz $a^2 + a$ sudý, a úloha má tedy řešení, právě když jsou čísla y, z sudá. To vede k jistým omezením, k důkazu to však nestačí. Redakce proto uvítá a náležitě bodově ohodnotí další příspěvky, které povedou k úplnému vyřešení úlohy nebo alespoň lépe omezí x.

Mirek

Úloha 5.2 – Oko (5b)

Zadání:

Většina případů krátkozrakosti a dalekozrakosti je způsobená posunutím sítnice kvůli protažení nebo zkrácení oka. Řešením jsou brýle, které spolu s čočkou v oku tvoří systém dvou zhruba souosých čoček. Ohnisková vzdálenost takové soustavy je závislá na vzdálenosti čoček.

Když se tedy krátkozrakému a dalekozrakému bude dále zhoršovat zrak, má si dát brýle blíž nebo dál od očí? Jak velkého rozdílu může vlastně dosáhnout? A jak moc je posunutá sítnice např. u dalekozrakého, kterému lékař předepsal na brýle +5 D *(dioptrií)?*

Údaje o oku není těžké najít a ohledně brýlí: uvažujte pouze normální nosy a brýle. Pokud brýle nosíte, budete mít situaci o něco snadnější, pokud ne, jistě ve svém okolí někoho takového najdete.

Řešení:

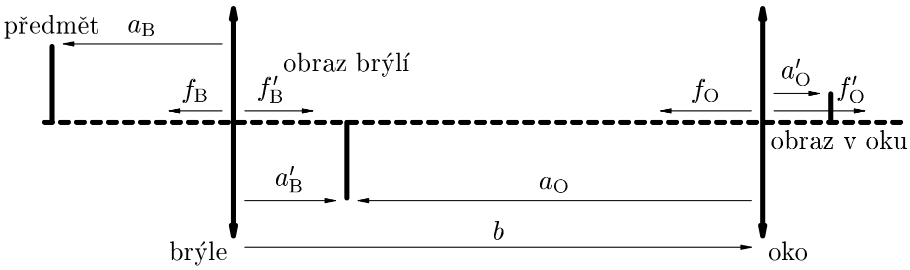
Začneme optickým vtipem z Divadla Járy Cimrmana:
Cyrano z Bergeracu si v důchodu pořídí brýle ke čtení, doma si je nasadí, rozhlédne se a řekne: „Ale Roxano! Ty se zase předvádíš. Je ti padesát a děláš tady stojky.“

Úkolem bylo zabývat se normálními nosy a brýlemi – necháme Cyrana svému osudu a budeme se dále věnovat úloze. Optická mohutnost běžného oka je 60 až 70 D, čemuž odpovídají ohniskové vzdálenosti pro neakomodované oko 17 mm a pro oko plně akomodované 14 mm. Optická mohutnost udávaná v dioptriích značí převrácenou hodnotu ohniskové vzdálenosti čočky v metrech. Akomodace je schopnost zvětšit optickou mohutnost oka tak, abychom viděli ostře všechny objekty ležící mezi dalekým a blízkým bodem (což značí maximální a minimální zaostřitelnou vzdálenost). Lidé zaostřují tak, že mění zakřivení čočky, ale například krokodýl ostří posouváním čočky.

Když už tedy člověk nemůže zaostřit, jak by potřeboval, přicházejí na řadu brýle. My si vytvoříme jednoduchý model oka a brýlí. Ty tvoří v ideálním případě souosou soustavu dvou čoček a vzorec na ohniskovou vzdálenost takovéto soustavy je jediný, který k úloze potřebujeme. Zkusíme si jej tedy odvodit podle obrázku r5.2.1. Pro lepší orientaci: index O znamená, že veličina náleží čočce v oku, index B značí příslušnost k brýlím, b značí vzdálenost oka od brýlí, nečárkované veličiny se týkají předmětového prostoru odkud „přicházejí paprsky“ a čárkované veličiny obrazového prostoru. To je třeba zdůraznit, protože to, že má čočka stejnou předmětovou a obrazovou ohniskovou vzdálenost, jak je člověk zvyklý, platí, pouze pokud prostor před a za čočkou má stejný index lomu, což u oční čočky není splněno.

Vyjdeme z Gaussova tvaru zobrazovací rovnice čočky:

$$\frac{a}{f} + \frac{a'}{f'} = 1\,.$$



Obr. r5.2.1

Dvakrát ji použijeme – jednou pro a'_B, podruhé pro a'_O:

$$a'_B = \frac{a_B f'_B}{a_B - f_B}\,,$$
$$a'_O = \frac{a_O f'_O}{a_O - f_O}\,.$$

Obraz vytvořený brýlemi ve vzdálenosti a'_B je ale zároveň předmětem, který zobrazuje oko, tj.: [4]

$$a_O = a'_B - b = \frac{a_B f'_B}{a_B + f'_B} - b = \frac{a_B f'_B - b(a_B + f'_B)}{a_B + f'_B}\,.$$

Tento vztah můžeme dosadit do rovnice pro a'_O a dostaneme:

$$a'_O = f'_O \frac{a_B f'_B - b(a_B + f'_B)}{a_B f'_B + (f'_O - b)(a_B + f'_B)}\,.$$

Teď už víme, jak daleko od čočky se zobrazuje předmět ze vzdálnosti a_B před brýlemi. Je to sice velmi komplikovaný vzorec, ale dál už ho budeme pouze zjednodušovat.

Krátkozrakost a dalekozrakost, jak bylo uvedeno v zadání, jsou většinou způsobeny tím, že se změní délka oka (a tím i vzdálenost sítnice od čočky). Když je potom oko bez akomodace a dívá se do dálky (nejlépe do nekonečna), nevzniká obraz na sítnici, ale před ní (u krátkozrakých) nebo za ní (u dalekozrakých). Rozsah akomodace zůstává nezměněn, takže by vlastně stačilo, aby se obraz nekonečna při nulové akomodaci posunul dopředu nebo dozadu na sítnici, a vše by se vrátilo do normálu. Při zkoumání vad oka se tedy zaměříme na nekonečně vzdálené předměty, neboli provedeme limitu $a_B \to \infty$.

$$a'_O{}^{(\infty)} = f'_O \frac{b - f'_B}{(b - f'_B) - f'_O} = f'_O \frac{1}{1 - f'_O/(b - f'_B)}\,.$$

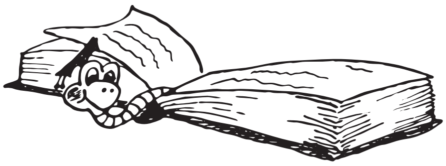
[4] V geometrické optice je třeba dát si pozor na to, že vzdálenosti jsou zde orientované. Sčítají se tedy jako vektory.

Dalekozraký člověk potřebuje obraz posunout blíž k čočce, tj. zmenšit a'_O. Můžeme s klidem předpokládat, že $f'_\mathrm{B} > b$ – neuvažujeme tak sice případy, kdy má člověk 30 D a více, ale sám nikoho takového neznám. Přepíšeme si vztah pro dalekozraké:

$$a'_\mathrm{O}{}^{(DAL)} = f'_\mathrm{O}\frac{1}{1 + f'_\mathrm{O}/|b - f'_\mathrm{B}|}\,.$$

Evidentně je třeba u dalekozrakosti zmenšit $|b - f'_\mathrm{B}|$ (to je logické, protože při nezměněném b prostě potřebujeme silnější brýle – menší f'_B). Pokud si nechceme koupit silnější brýle, můžeme zkusit posunout brýle dál od oka. Centimetr posunutí ale nahradí pouhý centimetr ohniskové vzdálenosti brýlí, s čímž dlouho nevystačíte, pokud nenosíte silné brýle nebo nejste Pinocchio.

Můžeme rovnou určit i posunutí sítnice u dalekozrakého člověka s brýlemi o optické mohutnosti 5 D ($f'_\mathrm{B} = 20\,\mathrm{cm}$). Budeme uvažovat $b = 2\,\mathrm{cm}$ a $f'_\mathrm{O} = 1{,}7\,\mathrm{cm}$. Dosazením do vzorce pro a'_O zjistíme, že oproti normální vzdálenosti 17 mm je sítnice u tohoto člověka vzdálena jen 15,5 mm, tedy rozdíl okolo 10 %.



Stejný postup jako u dalekozrakého člověka můžeme provést i u krátkozrakého. Zde bude platit, až na patologické případy, že $b - f'_\mathrm{B} > f'_\mathrm{O} > 0$, a snahou je naopak zvětšit a'_O. Napíšeme si tedy vzoreček:

$$a'_\mathrm{O}{}^{(KR)} = f'_\mathrm{O}\frac{1}{1 - f'_\mathrm{O}/|b - f'_\mathrm{B}|}.$$

A vidíme, že ke zvětšení a'_O potřebujeme, aby $|b - f'_\mathrm{B}|$ byla menší, tj. opět to chce buďto silnější brýle nebo menší b (f'_B je tentokrát záporné). Krátkozrakým tedy nezbývá než tisknout brýle co nejvíce k očím. Tady nepomůže už ani dlouhý nos. Výsledkem tedy je, že krátkozrací lidé si příliš nepomohou, ovšem lidé se silnější dalekozrakostí přece jen ano (posun o 4 cm vykompenzuje rozdíl mezi brýlemi 4 D a 5 D).

Charlie

Úloha 5.3 – Šachy (4b)

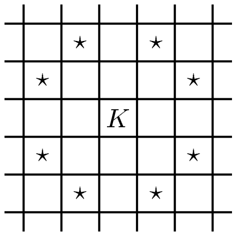
Zadání:

Každý jistě zná problém pokrytí šachovnice pomocí co nejmenšího počtu dam. My vám ale nabízíme problém o něco složitější. Umístěte na standardní šachovnici (8×8 polí) co nejmenší počet koní tak, aby ohrožovali každé pole na šachovnici (s výjimkou polí, na kterých stojí nějaký kůň).

Pro ty, co neznají šachová pravidla: kůň ohrožuje pole, která jsou od něj vzdálena o dvě políčka v jednom směru (doprava, doleva, nahoru nebo dolů) a zároveň o jedno políčko ve směru kolmém.

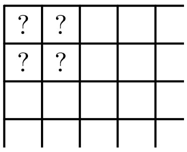
Řešení:

Úlohu vyřešíme ve dvou krocích. Nejprve si však na obrázku r5.3.1 připomeneme, jaká pole figurka koně ohrožuje.

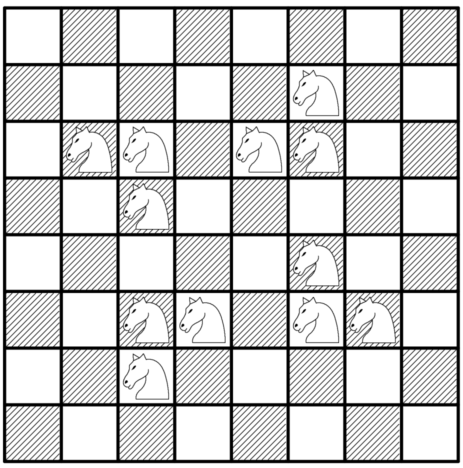


Obr. r5.3.1

V prvním kroku se zaměříme na 4 rohová pole šachovnice. Z dosahu koně z obrázku r5.3.1 je zřejmé, že pro pokrytí čtyř rohových polí potřebujeme alespoň tři koně, tj. pro každý roh tři koně. To nám dává první dolní odhad na počet koní 12.



V druhém kroku pokryjeme čtyřmi trojicemi koní postupně všechny rohy. Vidíme, že jsme pokryli celou šachovnici. Z kroku jedna plyne, že jsme našli jedno nejmenší řešení. Další řešení okamžitě plyne z inverze desky kolem vodorovné či horizontální osy. Při hledání řešení jsme vycházeli z intuitivní představy toho, že řešení bude symetrické.



Hanss

Úloha 6.1 – Rovnoběžník (4b)

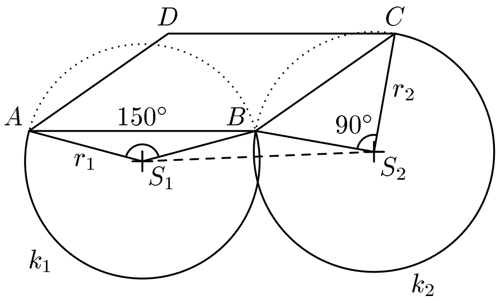
Zadání:

Mějme množinu všech rovnoběžníků $ABCD$ takových, že $|AB| = 8$ cm a $|BC| = 6$ cm. Ve vnější oblasti každého z nich sestrojme množinu bodů X, pro něž je $|\sphericalangle AXB| = 75°$, a množinu bodů Y, pro něž $|\sphericalangle BYC| = 45°$. Pro každý čtyřúhelník $ABCD$ označme X_0, Y_0 ty ze sestrojených bodů, jejichž vzájemná vzdálenost je největší možná. Označíme-li $|X_0Y_0| = d$, pak existuje takový rovnoběžník $ABCD$, pro který nabývá d maximální hodnoty. Určete obsah tohoto rovnoběžníku.

Řešení:

Abychom mohli určit obsah rovnoběžníku, potřebujeme kromě zadaných stran určit například některý z jeho vnitřních úhlů. Nejlépe se k tomu bude hodit ten při vrcholu B. Množiny bodů X a Y v zadání odpovídají kružnicovým obloukům sestrojeným nad stranami AB a BC.

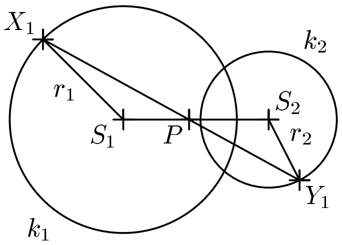
Doplníme-li v náčrtu situace *část* těchto oblouků na kružnice, dostaneme obrázek r6.1.1. V něm jsme označili středy kružnic k_1, k_2 po řadě S_1, S_2 a doplnili velikosti příslušných středových úhlů. Uvážíme-li nyní množinu všech takto vzniklých rovnoběžníků, je jasné, že se budou lišit vzájemnou polohou kružnic k_1 a k_2, nikoliv jejich poloměry. Navíc se budou obě kružnice vždy protínat v bodě B.



Obr. r6.1.1

Pro nalezení bodů X_0 a Y_0 proto uvažme dvě kružnice se středy S_1 a S_2 a poloměry r_1 a r_2, které mají alespoň jeden společný bod, ale nejsou totožné. Po chvilce snažení odhadneme, že spojnice dvou bodů ležících na jejich obvodech bude nejdelší, pokud na ní budou ležet středy obou kružnic; délka úsečky X_0Y_0 pak bude zřejmě $|X_0Y_0| = r_1 + |S_1S_2| + r_2$.

Tuto domněnku je však třeba dokázat. To můžeme například takto: Nechť tedy X_1 a Y_1 jsou body, na jejichž spojnici neleží ani jeden ze středů S_1, S_2. Tato spojnice buď úsečku S_1S_2 protíná, pak označme průsečík písmenem P (viz obr. r6.1.2), nebo úsečku S_1S_2 neprotíná a tvoří spolu s ní a úsečkami X_1S_1, Y_1S_2 čtyřúhelník (viz obr. r6.1.3). V prvním případě bude díky trojúhelníkové nerovnosti pro délku úsečky X_1P platit



Obr. r6.1.2

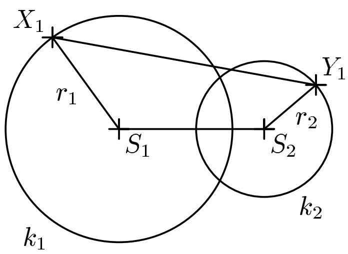
$$|X_1P| < |X_1S_1| + |S_1P|$$

a pro délku úsečky PY_1 pak

$$|PY_1| < |Y_1S_2| + |S_2P|\,.$$

Po sečtení tedy

$$|X_1Y_1| = |X_1P| + |PY_1| < |X_1S_1| + |S_1S_2| + \\ + |S_2Y_1| = r_1 + |S_1S_2| + r_2\,.$$



Obr. r6.1.3

Ve druhém případě nemůže být jedna strana čtyřúhelníku delší než součet zbylých tří stran, a opět

$$|X_1Y_1| < |X_1S_1| + |S_1S_2| + |S_2Y_2| = \\ = r_1 + |S_1S_2| + r_2\,.$$

Obdobným způsobem bychom probrali možnost, že na spojnici X_1Y_1 leží právě jeden z bodů S_1, S_2, což ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení.

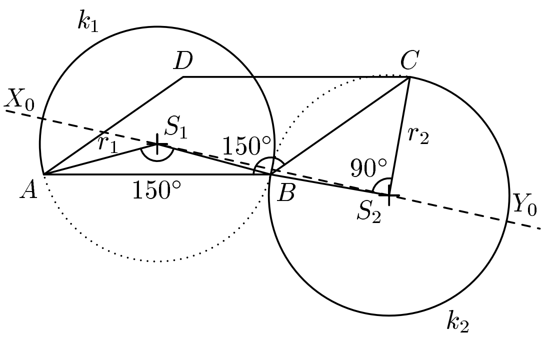
Jak jsme právě ukázali, pro kterýkoli z uvažovaných rovnoběžníků leží body X_0, Y_0 na přímce procházející středy kružnic k_1, k_2. Zbývá nalézt rovnoběžník, pro který je (v závislosti na poloze kružnic) $d = |X_0Y_0|$ největší. Neboť je $d = r_1 + r_2 + |S_1S_2|$ a r_1, r_2 jsou konstanty, hledáme maximální délku $|S_1S_2|$. Vrátíme-li se k obrázku r6.1.1, vyplývá kromě jiného z trojúhelníkové nerovnosti, že

$$|S_1S_2| \leq |S_1B| + |BS_2| = r_1 + r_2$$

a maximální hodnotu $|S_1S_2|$ nabývá, pokud bod B leží na úsečce S_1S_2. Protože pak platí

$$180^\circ = |\sphericalangle S_1BA| + |\sphericalangle ABC| + |\sphericalangle CBS_2|\,, \\ |\sphericalangle S_1BA| = 15^\circ\,, \qquad |\sphericalangle CBS_2| = 45^\circ\,,$$

dostáváme $|\sphericalangle ABC| = 120^\circ$.



Obr. r6.1.4

Jak jsme ale poznamenali v úvodu, na obr. r6.1.1 nejsou vyznačeny všechny body X, Y odpovídající zadání. Chybí části kružnicových oblouků v polorovinách ABD a BCD. Doplněním i těchto oblouků na kružnice získáme další tři dvojice kružnic, jejichž vzájemnou polohu ovlivňujeme velikostí úhlu při vrcholu B. Načrtněte si tyto případy podrobně, abyste se přesvědčili, že úloze dále vyhovuje pouze situace obrázku r6.1.4. Opět je nutné, aby bod B ležel na úsečce S_1S_2, a tedy pro vnitřní úhel rovnoběžníku při vrcholu B v tomto případě platí

$$|\sphericalangle ABC| = |\sphericalangle ABS_1| + (180^\circ - |\sphericalangle S_2BC|) = 15^\circ + (180^\circ - 45^\circ) = 150^\circ.$$

Pro tento případ je navíc třeba zvlášť ověřit, že bod X_0 leží ve vnější oblasti rovnoběžníku, o čemž se snadno přesvědčíte sami.

Použitím vzorečku pro obsah rovnoběžníku

$$S_{ABCD} = |AB| \cdot |BC| \cdot \sin |\sphericalangle ABC|$$

máme konečně $S_{ABCD} = 8 \cdot 6 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 24\sqrt{3}\,\mathrm{cm}^2$ (pro úhel 120°) nebo $S_{ABCD} = 8 \cdot 6 \cdot \frac{1}{2} = 24\,\mathrm{cm}^2$ (pro úhel 150°), což jsme chtěli vědět.

Mirek

Úloha 6.2 – Oscilující slaná voda (6b)

Zadání:

Kelímek s malou dírkou na spodní straně, který obsahuje slanou vodu, je částečně ponořený do velké nádoby se sladkou vodou a upevněný.

Vysvětlete mechanizmus pozorovaného periodického procesu a zkoumejte závislost periody na různých parametrech.

Na základě teoretických úvah a experimentů formulujte vztah udávající frekvenci tohoto jevu a určete okrajové podmínky, aby kmity vůbec mohly nastat.

Pro zviditelnění procesu by měla být voda v kelímku zabarvená.

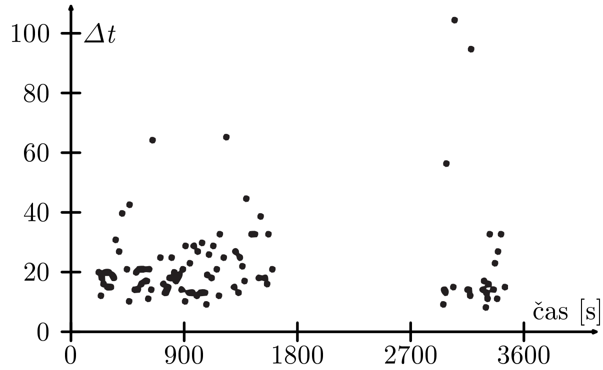
Řešení:

Riešení veľa neprišlo a tí, čo sa nezľakli ťažkého zadania, sa s úlohou príliš nepohrali. Mnoho z vás sa domnievalo, že podstatou problému je osmóza – osmotický jav. Osmóza je však jav, kedy cez polopriepustnú membránu môžu malé molekuly prechádzať bez obmedzenia a veľké nie. Následne musí vzniknúť rozdiel tlakov, pretože na jednej strane je viacej molekúl nepriepustnej látky ako na druhej.

Otázkou je, prečo nedochádza k difúzii, ale k výmene hmôt. Ono bude dochádzať k difúzii, ak by sme buď zmenšili priemer dierky, znížili koncentráciu alebo zmenšili výšku hladiny v pohári s dierkou. Pri príliš veľkom priemere dierok by nastal tok slanej vody dole a sladkej hore zároveň.

Otázkou je, prečo nie sú tieto kmity tlmené. Je to tým, že ak by sme aj uviedli systém do rovnováhy, tak táto rovnováha je vratká (hustejšia tekutina je navrchu). Systém má snahu dostať sa do stabilného rovnovážneho stavu, preto stačí minimálny impulz a opäť nám nastane tok slanej vody dole a sladkej nahor.

Experimentálne sme zmerali periódu kmitov pre roztok o objeme 0,2 litra, v ktorom bola jedna vrchovatá kávová lyžička soli. Graf vyzerá následovne



Medzera v strede je spôsobená prestávkou na obed. Na vodorovnej osi je nanesený čas (v sekundách), na zvislej čas medzi dvoma po sebe idúcimi zmenami smeru toku vody. Vďaka rozdielnemu indexu lomu je tok zreteľne viditeľný aj pre malé koncentrácie.

Vysoké časy medzi dvoma po sebe idúcimi zmenami smeru toku sú zrejme spôsobené obojsmerným tokom, kedy slaná voda tiekla dole a zároveň sladká do pohárika. Toto sú spomínané pohyby tekutiny blízko stavu rovnováhy (viď vyššie). Dalo sa vidieť, že pohyb slanej vody dole sa spomaľuje a prúd začína byť tenký, ale po istom čase sa prúd obnovil na svoju obvyklú hrúbku a rýchlosť.

Po orezaní $\Delta t > 30\,\mathrm{s}$ a preložení priamky grafom dostaneme zhruba konštantnú závislosť Δt na čase. Dokonca nám s časom nefyzikálne priamka klesá. Na počiatku je teda závislosť zhruba konštantná. Neskôr sa bude frekvencia oscilácií znižovať, ale v tej oblasti sme už nemerali.

Pri koncentrácii 3 vrchovaté lyžičky soli v 0,2 litra vody sme dostali podobné výsledky, dokonca rozptyl bol menší.

Bzučo

Úloha 6.3 – Přímky (4b)

Zadání:

Najděte co nejvíce přímek v prostoru takových, aby měla každá od každé vzdálenost 1 *(vzdálenost dvou přímek p, q je* $\min\{|x-y|, x \in p, y \in q\}$*).*

Řešení:

Pokud vezmeme otázku doslovně, správná odpověď je 0. Neexistuje totiž žádná neprázdná množina přímek v prostoru, aby každá přímka od každé byla vzdálena 1, neboť každá přímka má vzdálenost 0 od sebe samé. Připusťme tedy volnější výklad zadání a ptejme se: „Kolik může existovat přímek v prostoru, aby každá byla od *každé jiné* vzdálena 1?“

Pokud si místo přímek představím válcové plochy s poloměrem 1/2 (přímku vedu středem válce), mám ekvivalentní problém „najdi co nejvíc stejných válců v prostoru, které se každý každého dotýkají". Je zřejmé, že dva válce o poloměru 1/2 se dotýkají, právě když příslušné přímky jsou vzdáleny 1. Pokud jsou první dvě přímky rovnoběžné, znamená to, že jejich válce se dotýkají podél celé přímky. Pokud k nim chci přidat třetí válec, mám dvě možnosti: buď jej „vsunu" mezi první dva, takže příslušná přímka je s nimi také rovnoběžná, nebo jej na ně položím šikmo. V prvním případě už žádný další válec nemohu přidat a mám 3 rovnoběžné přímky. V druhém případě je volba třetí přímky libovolná v rámci roviny, kterou mi určují první dvě přímky (množina všech přímek, jejichž válce mohu „položit" na první dva válce, tvoří rovinu); v této rovině však najdu nejvýše 2 přímky, které jsou od sebe vzdáleny 1. To jsou opět rovnoběžky. Mám tedy už 4 přímky, které jsou navzájem vzdáleny jedna: jsou to dvě rovnoběžky a „nad nimi", ve výšce 1, další dvě rovnoběžky (které ovšem nejsou rovnoběžné s prvními dvěma).

Pokud však první dvě přímky zvolím mimoběžně, je situace složitější. Pomocí modelů s válci nebo tužkami se například Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Roskovcovi podařilo zkonstruovat až 6 válců, které se každý každého dotýkají, což ovšem není rigorózní důkaz, že 6 přímek opravdu existuje. Nepodařilo se nám najít žádný lepší odhad než interval $\langle 4, \infty \rangle$, i když jsme přesvědčeni, že jich existuje alespoň 5.

Peťo

Výsledková listina

			Číslo 5			Číslo 6			Témata				
Pořadí	**Jméno**	$\sum_{-1}$	**r1**	**r2**	**r3**	**r1**	**r2**	**r3**	**t2**	**t4**	**t6**	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Dr.^{MM} Zbyněk Konečný	77	5		4	5		4	6		10	34	77
2.	Dr.^{MM} Jan Musílek	60											60
3.	Doc.^{MM} Stanislav Basovník	125							16			16	57
4.	Dr.^{MM} Eva Černohorská	53											53
5–6.	Dr.^{MM} Tereza Klimošová	91				4	4					8	48
	Dr.^{MM} Jozef Cmar	73			4							4	48
7.	Mgr.^{MM} Peter Perešíni	44											44
8.	Doc.^{MM} Lenka Studničná	106											36
9.	Mgr.^{MM} Jindřich Soukup	49				4			6		4	14	35
10.	Mgr.^{MM} Peter Greškovič	33				4	3	4				11	33
11.	Mgr.^{MM} Jan Křivonožka	28											28
12.	Mgr.^{MM} František Konopecký	27											27
13–15.	Dr.^{MM} Helena Kubátová	73											26
	Mgr.^{MM} Martin Dungl	38											26
	Mgr.^{MM} Tomáš Gavenčiak	37											26
16–17.	Mgr.^{MM} Jiří Borkovec	24	1		4	1		1				7	24
	Mgr.^{MM} Bedřich Roskovec	24			4	3	4	4				15	24
18–19.	Dr.^{MM} Jan Olšina	89											23
	Dr.^{MM} Karla Procházková	58						4				4	23
20–21.	Mgr.^{MM} Štěpánka Mohylová	29											22
	Mgr.^{MM} Luboš Ptáček	26											22
22.	Prof.^{MM} Martin Demín	255											21
23.	Mgr.^{MM} Petr Dostál	20											20
24.	Bc.^{MM} Martin Konečný	19							6			6	19
25.	Prof.^{MM} Tomáš Štec	221									5	5	18
26–27.	Bc.^{MM} Kateřina Böhmová	17											17
	Bc.^{MM} Ondřej Tkáč	17		4	3							7	17
28–30.	Bc.^{MM} Martin Holeček	16											16
	Bc.^{MM} Zuzana Safernová	16											16
	Bc.^{MM} Martin Suchan	16			4							4	16
31–32.	Bc.^{MM} Petr Morávek	15											15
	Bc.^{MM} Jana Przeczková	15											15
33–35.	Dr.^{MM} Michal Demín	70											14
	Dr.^{MM} Jana Babováková	52											14
	Mgr.^{MM} Ľuboš Uličný	35											14
36.	Bc.^{MM} Tomáš Javůrek	13				3		3				6	13
37–38.	Bc.^{MM} Jaroslav Šeděnka	12											12
	Bc.^{MM} Miroslav Vetrik	12											12
39–43.	Mgr.^{MM} Petra Malá	29								1		1	11
	Bc.^{MM} Monika Martinisková	16											11
	Bc.^{MM} Michal Matych	11											11

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Číslo 5			Číslo 6			Témata			$\sum_0$	$\sum_1$
			r1	r2	r3	r1	r2	r3	t2	t4	t6		
39.–43.	Bc.^{MM} Pavel Procházka	11		1	2							3	11
	Bc.^{MM} Adam Šugl	11											11
44.	Bc.^{MM} Jan Havlik	10											10
45–46.	Mgr.^{MM} Vojtěch Kubáň	34											9
	Michal Takács	9	4	3	2							9	9
47–50.	Tereza Hlaváčová	8											8
	Jiří Milička	8											8
	Marek Scholz	8											8
	Jan Uhlík	8											8
51.	Bc.^{MM} Richard Bobek	10			4							4	7
52–55.	Doc.^{MM} Zuzana Rozlívková	102											6
	Mgr.^{MM} Michal Růžek	49											6
	Bc.^{MM} Jan Rieger	18											6
	Antonín Špaček	6											6
56.	Zdeněk Vais	4							1			1	4
57–60.	Dr.^{MM} Dana Beránková	88											3
	Tereza Pechová	3	1									1	3
	Hana Suchomelová	3											3
	Přemysl Šrámek	3											3
61–62.	Milan Dvořák	2											2
	Jan Šácha	2											2
63–64.	Pavla Grubhofferová	6											1
	Jiří Krejčí	1											1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$). K celkovému počtu bodů $\sum_{-1}$ jsou oproti předchozím výsledkovým listinám přičteny navíc body za příspěvky do konferencí.

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.