M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník X číslo 5

Termín odeslání: 12. 4. 2004

Zadání úloh

Úloha 5.1 – Čtvercová čísla (5b)

Přirozené číslo nazveme čtvercovým, jestliže je jeho druhá odmocnina přirozené číslo. Nalezněte trojici přirozených čísel $\{x, y, z\}$ takovou, že každý z výrazů

$$z^2 + y^2 + x^2 + x + y + z\,, \quad y^2 + x^2 + x + y + z \quad \text{a} \quad x^2 + x + y + z$$

je čtvercovým číslem a přitom x je nejmenší možné!

Úloha 5.2 – Oko (5b)

Většina případů krátkozrakosti a dalekozrakosti je způsobená posunutím sítnice kvůli protažení nebo zkrácení oka. Řešením jsou brýle, které spolu s čočkou v oku tvoří systém dvou zhruba souosých čoček. Ohnisková vzdálenost takové soustavy je závislá na vzdálenosti čoček.

Když se tedy krátkozrakému a dalekozrakému bude dále zhoršovat zrak, má si dát brýle blíž nebo dál od očí? Jak velkého rozdílu může vlastně dosáhnout? A jak moc je posunutá sítnice např. u dalekozrakého, kterému lékař předepsal na brýle $+5\,\mathrm{D}$ (dioptrií)?

Údaje o oku není těžké najít a ohledně brýlí: uvažujte pouze normální nosy a brýle. Pokud brýle nosíte, budete mít situaci o něco snadnější, pokud ne, jistě ve svém okolí někoho takového najdete.

Úloha 5.3 – Šachy (4b)

Každý jistě zná problém pokrytí šachovnice pomocí co nejmenšího počtu dam. My vám ale nabízíme problém o něco složitější. Umístěte na standardní šachovnici (8×8 polí) co nejmenší počet koní tak, aby ohrožovali každé pole na šachovnici (s výjimkou polí, na kterých stojí nějaký kůň).

Pro ty, co neznají šachová pravidla: kůň ohrožuje pole, která jsou od něj vzdálena o dvě políčka v jednom směru (doprava, doleva, nahoru nebo dolů) a zároveň o jedno políčko ve směru kolmém.

Řešení témat

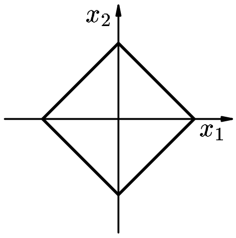
Téma 2 – n-rozměrné prostory

n-rozměrný 2^n-stěn

Dr.MM Stanislav „Angwin“ Basovník

O n-rozměrné krychli víme, že má $2n$ stěn ($n-1$ rozměrných) a 2^n vrcholů. K n-D krychli existuje duální n-D těleso, které má 2^n stěn a $2n$ vrcholů. Rozhodl jsem se toto těleso nazvat 2^n-stěn (ve 4-D se mu říká hyperosmistěn). Podíváme se na některé vlastnosti tohoto platónského tělesa.

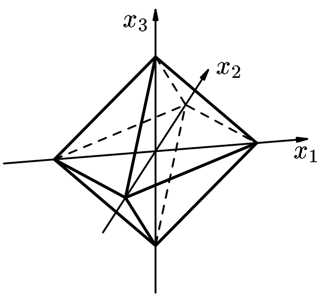
Vrcholy 2^n-stěnu budou umístěny na hlavních osách soustavy souřadnic tak, že na každé poloose ve vzdálenosti R od počátku leží jeden vrchol. Takto získáme všech $2n$ vrcholů, neboť v n-D prostoru máme n souřadnicových os.



Obr. t2.1

Podíváme se, jak z $(n-1)$-D tělesa sestavíme n-D těleso, abychom zjistili, které vrcholy jsou spojené hranou (jednorozměrnou). Začneme u dvourozměrného tělesa. Dostaneme čtverec (viz obr. t2.1).

Třírozměrné těleso získáme tak, že na třetí osu, která je kolmá na dvě původní, položíme další dva vrcholy. Každý z těchto dvou nových vrcholů spojíme hranou se všemi vrcholy původního dvourozměrného tělesa. Dostaneme osmistěn (viz obr. t2.2).



Obr. t2.2

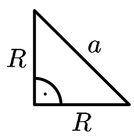
Takto můžeme pokračovat dál a budeme postupně dostávat vícerozměrná tělesa. Teď, když víme, jak jsou vrcholy spojené hranami, můžeme určit počet těchto hran. Původní $(n-1)$-D těleso mělo h_{n-1} hran. Přidali jsme dva vrcholy a oba je spojili hranou se všemi $2(n-1)$ původními vrcholy. Přidali jsme celkem $2 \cdot 2(n-1)$ hran. Celkový počet hran je $h_n = h_{n-1} + 4 \cdot (n-1)$. Protože $h_2 = 4$, dostaneme opakovaným dosazováním $h_n = 4 + 4 \cdot 2 + \ldots + 4 \cdot (n-2) + 4 \cdot (n-1)$, což je rovno $h_n = 4 \cdot (n-1) \cdot n/2 = 2n(n-1)$. Tento vztah můžeme dokázat také matematickou indukcí.[1]

Podobným způsobem spočítáme stěny tohoto tělesa. Stěnou budeme rozumět $(n-1)$-D útvar, který je určen hranami řešeného tělesa a leží na jeho

[1] *Pozn. red.: Nebo si uvědomit, že z každého z $2n$ vrcholů vychází $2(n-1)$ hran, což už bylo řečeno, a každá hrana spojuje 2 vrcholy.*

povrchu.[2] Opět vyjdeme z $(n-1)$-D tělesa. Toto těleso mělo s_{n-1} stěn. Přidáním dvou vrcholů a příslušných hran jsme dostali n-D těleso a zároveň nám vznikly $(n-1)$-D stěny. Těmito stěnami jsou $(n-1)$-D jehlany, jejichž podstavy jsou stěny původního $(n-1)$-D tělesa. Ramena těchto jehlanů směřují do nového vrcholů 2^n-stěnu. Protože 2^n-stěn má dva nové vrcholy oproti původnímu $(n-1)$-D tělesu, bude počet stěn n-D tělesa roven dvojnásobku počtu stěn $(n-1)$-D tělesa. Z toho plyne, že $s_n = 2 \cdot s_{n-1}$. Dvourozměrné těleso má celkem čtyři stěny (jsou jednorozměrné, takže to jsou zároveň hrany). Vyjdeme z toho údaje a vyřešíme rekurentní vztah $s_n = 2 \cdot s_{n-1} = 2 \cdot 2 \cdot s_{n-2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot s_{n-3} = \ldots = 2^{n-2} \cdot s_2 = 2^{n-2} \cdot 4 = 2^n$, což odpovídá původní hypotéze o duálnosti tohoto tělesa k n-D krychli. O stěně 2^n-stěnu můžeme říct, že je to pravidelný n-stěn, označovaný také jako $(n-1)$-D simplex[3]. (Stěnou 2-D tělesa je úsečka délky a. Nad touto úsečku jsme přidali dvě ramena délky a, a dostali tak rovnostranný trojúhelník, který je stěnou 3-D tělesa. Nad tento trojúhelník jsme přidali tři ramena opět délky a a dostali jsme pravidelný čtyřstěn, což je stěna 4-D tělesa atd.)

K výpočtu objemu 2^n-stěnu budeme potřebovat poloměr opsané koule tomuto tělesu. Poloměr této koule je vzdálenost všech vrcholů od jednoho bodu. V našem případě je to vzdálenost vrcholu od počátku souřadnic, která je konstantní, označme ji R. Chceme-li vyjádřit R v závislosti na délce hrany a, musíme vyjít z Pythagorovy věty (obr. t2.3):



Obr. t2.3

$$2R^2 = a^2, \quad \text{tedy} \quad R = a\sqrt{2}/2\,.$$

Pravidelný 2^n-stěn je složen ze dvou jehlanů, jejichž společnou podstavou je $(n-1)$-rozměrný 2^{n-1}-stěn. Obecně pro objem V_n n-rozměrných jehlanů platí

$$V_n = \int_0^v \left(\frac{x}{v}\right)^{n-1} P_{n-1} \mathrm{d}x = \left[\frac{1}{v^{n-1}} \cdot \frac{x^n}{n} \cdot P_{n-1}\right]_0^v = \frac{1}{n} v P_{n-1}\,,$$

kde v je výška jehlanu a P_{n-1} je obsah $(n-1)$-D podstavy.

Pozn. red.: Pro ty, kteří nejsou zběhlí v integrování, stačí zatím uvěřit, že podobně jako v 3-D prostoru je objem jehlanů „jedna třetina velikosti podstavy krát výška“, v n-D prostoru je to „jedna n-tina krát výška“. Zkuste to dokázat bez pomoci integrálů!

---

[2] *Pozn. red.: Tato definice mi není formálně moc jasná, ale v tomto případě se můžeme spolehnout na intuici.*

[3] *Pozn. red.: Zde by se čtenář mohl zamyslet nad tým, že n-simplex je také „zobecněné platónské těleso“, a to duální samo k sobě.*

Pro objem n-D jehlanu tedy platí $V_n = 2 \cdot \frac{1}{n} \cdot R \cdot V_{n-1} = \frac{1}{n} \cdot a\sqrt{2} \cdot V_{n-1}$, přičemž $V_2 = a^2$. Řešením tohoto rekurentního vztahu je

$$V_n = \frac{1}{n} a\sqrt{2}\, V_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} a^2 \left(\sqrt{2}\right)^2 V_{n-2} = \dots$$

$$\dots = \frac{a^{n-2}\, 2^{(n-2)/2}\, V_2}{n(n-1)(n-2)\cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3} = \frac{2}{n!}\, a^{n-2}\, 2^{(n-2)/2}\, a^2 = \frac{2^{n/2}}{n!} a^n \,.$$

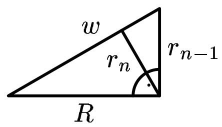
Pro výpočet $(n-1)$-D povrchu už známe počet stěn a také víme, že tyto stěny jsou $(n-1)$-D simplexy (pravidelné n stěny). Problém je určit objem takového tělesa. Odvození je poměrně složité a zatím jsem nenašel jednodušší postup, proto zde uvedu rovnou výsledný vzorec pro n-rozměrný $(n+1)$-stěn a jeho odvození si nechám na jindy. Nechávám tak prostor pro ostatní, aby zkusili také odvodit tento vzorec pro objem n-D simplexu V'_n:

$$V'_n = a^n\, \frac{\sqrt{2^{-n} \cdot (n+1)}}{n!} \,. \qquad \text{(t2.1)}$$

Označím-li $(n-1)$-rozměrný povrch n-rozměrného 2^n-stěnu P_n, platí

$$P_n = 2^n\, V'_{n-1} = 2^n\, a^{n-1}\, \frac{\sqrt{2^{1-n}\, n}}{(n-1)!} = a^{n-1}\, \frac{\sqrt{2^{n+1}\, n}}{(n-1)!} \,.$$

Poslední věc, kterou odvodím pro 2^n-stěn je poloměr vepsané koule. Při troše představivosti si můžeme všimnout, že se vzrůstající dimenzí se poloměr vepsané koule zmenšuje. Vše potřebné nám ukazuje obrázek t2.4, kde r_{n-1} je poloměr vepsané koule $(n-1)$-rozměrnému tělesu, r_n je poloměr vepsané koule n-rozměrnému tělesu, R je poloměr koule opsané, který nezávisí na dimenzi, a w je výška $(n-1)$-rozměrného jehlanu, který je stěnou n-rozměrného tělesa.



Obr. t2.4

Z obsahu trojúhelníku na obrázku t2.4 plyne rovnost $wr_n/2 = Rr_{n-1}/2$, odkud dostaneme $r_n = Rr_{n-1}/w$. Dále z Pythagorovy věty víme, že

$$w^2 = R^2 + r_{n-1}^2, \quad \text{tedy} \quad w = \sqrt{R^2 + r_{n-1}^2} \,.$$

Po dosazení do r_n získáme tento rekurentní vztah pro výpočet poloměru vepsané koule:

$$r_n = \frac{R\, r_{n-1}}{\sqrt{R^2 + r_{n-1}^2}} \,,$$

který upravíme:

$$r_n = \frac{1}{\frac{\sqrt{R^2+r_{n-1}^2}}{R\, r_{n-1}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2+r_{n-1}^2}{R^2 r_{n-1}^2}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{r_{n-1}^2} + \frac{1}{R^2}}} \,,$$

$$r_n^2 = \frac{1}{\frac{1}{r_{n-1}^2} + \frac{1}{R^2}} \,,$$

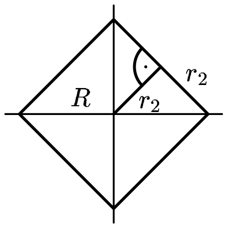
$$\frac{1}{r_n^2} = \frac{1}{r_{n-1}^2} + \frac{1}{R^2} \,.$$

Po zavedení substituce $B_n = 1/r_n^2$ přejde rekurentní vztah na tvar $B_n = B_{n-1} + 1/R^2$, který vyřešíme v proměnné B_n:

$$B_n = B_{n-1} + \frac{1}{R^2} = B_{n-2} + \frac{2}{R^2} = \ldots = B_2 + \frac{n-2}{R^2}\,.$$

V dvojrozměrném prostoru platí $2r_2^2 = R^2$, neboli $r_2^2 = R^2/2$. Odtud vychází

$$B_2 = \frac{1}{r_2^2} = \frac{2}{R^2}\,.$$



Obr. t2.5

Po dosazení

$$B_n = \frac{2}{R^2} + \frac{n-2}{R^2} = \frac{n}{R^2}\,,$$

$$\frac{1}{r_n^2} = \frac{n}{R^2}, \quad \text{tedy} \quad r_n = R\frac{1}{\sqrt{n}}\,.$$

Chceme-li vyjádřit poloměr vepsané koule v závislosti na délce hrany a, musíme dosadit $R = a\sqrt{2}/2$:

$$r_n = R\frac{1}{\sqrt{n}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}} = a\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}}\,,$$

$$r_n = a\frac{\sqrt{2n}}{2n}\,.$$

Pozn. red.: Zkuste se zamyslet nad tím, zda se z tohoto vztahu pro poloměr vepsané koule nedá odvodit výše uvedený vztah (t2.1) pro objem n-simplexu, který Dr.^MM^ Standa Basovník nedokazoval. Pokud si opět uvědomíme, že objem n-D simplexu je objem $(n-1)$-D simplexu krát „výška" lomeno n, tak vidíme, že vzorec (1) je ekvivalentní tvrzení, že výška pravidelného n-D simplexu je $a\sqrt{(n+1)/(2n)}$ (rozmyslete si!). Pokud však známe poloměr vepsané kružnice r_n, není těžké si uvědomit rovnost $v^2 = R^2 + r_n^2$, kde v je výška n-D simplexu (představte si ten „správný" pravoúhlý trojúhelník v 2^{n+1} stěně, potrapte se!). Z toho bezprostředně plyne po dosazení $r_n = R/\sqrt{n}$ vztah

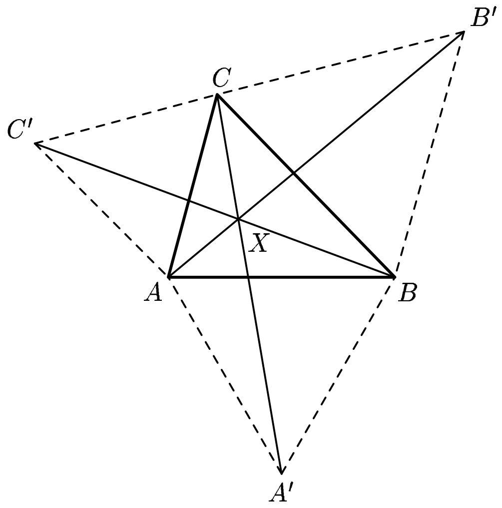
$$v = R\sqrt{\frac{n+1}{n}} = a\sqrt{\frac{n+1}{2n}}\,,$$

což je ekvivalentní (t2.1).

Peťo

Téma 3 – Výstavba sítí

Dr.^MM^ Stanislav Basovník nám zaslal jiný způsob konstrukce místa, kde má být umístěn rozbočovač, jako doplnění článku *Síť pro 3 body* od *Mgr.^MM^ Evy Černohorské* z minulého čísla.



Obr. t3.1

Alternativní konstrukce rozbočovače

Dr.^MM Stanislav Basovník

Předpokládejme, že jsou všechny úhly v trojúhelníku menší než 120° (v opačném případě by nejkratší síť tvořily spojnice vrcholu s tupým úhlem se zbývajícími dvěma vrcholy). Potom podle řešení *Mgr.^MM Evy Černohorské* leží rozbočovač (bod X) na spojnici bodů C' a B, kde bod C' dostaneme otočením bodu C okolo bodu A o 60° (viz obr. t3.1).

Analogicky otočíme bod B o 60° okolo bodu C. Bod X potom leží na úsečce AB'. Podobně leží bod X na úsečce $A'C$, kde bod A' získáme otočením bodu A o 60° okolo bodu B.

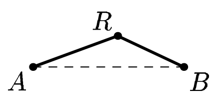
Bod X tedy sestrojíme tak, že jednotlivým stranám připíšeme rovnostranné trojúhelníky a spojíme vrcholy nad těmito stranami s protějšími vrcholy trojúhelníku ABC. Bod X (který má nejmenší součet vzdáleností od vrcholů trojúhelníka) tak dostává další zajímavý geometrický význam.

Co musí splňovat všechny rozbočovače v síti

Mgr.^MM Eva Černohorská

- *Do rozbočovače vedou alespoň tři kabely.*

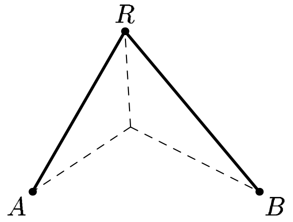
  Pokud by do něj vedly pouze dva byla by přímá spojnice bodů, ze kterých kabely vedou, kratší díky trojúhelníkové nerovností (viz obr. t3.2)



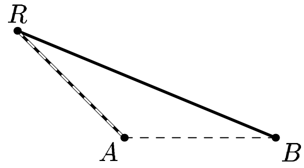
Obr. t3.2

- *Kabely svírají úhel alespoň* 120°.

  Pozn. red.: Toto tvrzení autorka poměrně složitě dokazuje. Lze však postupovat mnohem jednodušeji: Nechť máme nejkratší možné propojení *a nechť v něm existují dva body A, B takové, že z nich vede kabel do rozbočovače R, a zároveň je úhel ARB menší než 120°. Předpokládejme nyní, že jsou všechny úhly v trojúhelníku ABR menší než 120°. Potom čárkované propojení na obr. t3.3 je kratší než propojení původní, což je spor s tím, že původní propojení bylo nejkratší možné. Pokud by jeden z úhlů, např. úhel BAR byl větší než 120°, bude zase kratší přímé propojení B–A–R (čárkovaně na obr. t3.4) a opět docházíme ke sporu.*



Obr. t3.3



Obr. t3.4

- *Do každého rozbočovače vedou právě tři dráty.*

  Toto tvrzení jasně plyne z předchozích dvou: Do rozbočovače vedou alespoň tři dráty a zároveň sousední kabely svírají úhel alespoň 120°. Ale plný úhel je $360° = 3 \cdot 120°$, tedy kabely jsou právě tři a svírají mezi sebou úhel 120°.

- *V síti je maximálně o dva méně rozbočovačů než měst, do každého města vede nejvýše $m - n + 3$ drátů (kde m je počet měst a n je počet rozbočovačů).*

  Po sítí požadujeme, aby byla souvislá, a zároveň chceme, aby se v ní nevyskytovaly kružnice[4]. Kdyby síť obsahovala nějakou kružnici, můžeme její část zrušit a síť zůstane souvislá a zároveň bude kratší. Síť bez kružnic obsahuje maximálně $(n + m - 1)$ drátů. Tyto dráty mají potom nejvýše $(2n + 2m + 2)$ konců, přičemž je v každém městě alespoň jeden konec a v každém rozbočovači jsou právě tři konce. Do zvoleného města může tedy vést $(2m + 2n + 2) - (m - 1) - 3n = m - n + 3$ drátů.

  Minimální počet konců v jednom městě je 1. Z rovnice $m - n + 3 = 1$ potom dostáváme maximální počet rozbočovačů $n = m - 2$.

Martin Krsek

Téma 5 – Opilec aneb difuse trochu jinak

Opilec ztrácí naději

Mgr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Gavenčiak

Pozn. red.: Mgr.$^{\text{MM}}$ Tomáš Gavenčiak nezávisle odvodil vzorec pro pravděpodobnost návratu opilce nad kanál (tento vzorec jsme uveřejnili již v předchozím

[4] Neboli smyčky po niž se dá bez vracení dostat do stejného bodu.

čísle v článku Mgr.[MM] *Jana Musílka):*

$$P(2n) = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}}\,.$$

Podařilo se mu dokonce správně odvodit vzorec pro pravděpodobnost výskytu opilce na místě se souřadnicemi $[x, y]$*:*

$$P(2n, x, y) = \frac{\binom{2n}{x+n}\binom{2n}{y+n}}{4^{2n}}\,.$$

Důležité je ovšem to, že souřadnice x, y *jsou míněny diagonálně, neboli počátek má souřadnice* $[0, 0]$*, místo 2 kroky dopředu má souřadnice* $[1, 1]$*, místo 2 kroky vpravo má souřadnice* $[1, -1]$*. Dále již ve svém řešení pokračuje v úvahách nad opilcovým návratem domů během sta kroků.*

Ke svému bydlišti se opilec může dostat pouze pro sudý počet kroků k. Pro jednoduchost předpokládám, že jeho bydliště lze libovolně obcházet a vstoupit do něj z libovolné strany (snad bydlí v altánu nebo na stromě). Jeho souřadnice si ve svém souřadném systému označím $[15, 15]$, což odpovídá 30 krokům vpřed, tedy pravděpodobnost, že narazí v kroku $k = 2n$ na domov je

$$P(2n, 15, 15) = P(2n)_d = \frac{\binom{2n}{15+n}^2}{4^{2n}}$$

pro $k = 30, 31, \ldots, 100$, a já musím určit

$$\sum_{\substack{i=30\\ i \text{ sudé}}}^{100} P(i)_d = \sum_{j=15}^{50} \frac{\binom{2j}{15+j}^2}{4^{2j}}\,.$$

Toto ale započítá i případy, kdy vejde a znova se vrátí, což je nežádoucí. Abych se tomuto vyhnul, udělám z cílového pole „černou díru“ a vynásobím vždy pravděpodobnost příchodu domů v kroku k pravděpodobností

$$1 - \sum_{\substack{i=30\\ i \text{ sudé}}}^{k-2} P(i)_d \cdot P(k-i, 0, 0)\,.$$

Co to znamená? Musím odečíst pravděpodobnost, že jsem už v i-tém kroku přišel ($P(i)_d$), ale pak se po $k-i$ krocích vrátil ($P(k-i, 0, 0)$). Celkový (a snad správný) vzorec tedy je

$$S_{100,d} = \sum_{\substack{k=30\\ k \text{ sudé}}}^{100} P(k)_d \cdot \left(1 - \sum_{\substack{i=30\\ i \text{ sudé}}}^{k-2} P(i)_d \cdot P(k-i, 0, 0)\right).$$

Teď jsem si uvědomil, že ani tohle není úplně dobře, protože takto odečtu dvakrát případ, kdy přijde, odejde, přijde, odejde a znovu přijde, což je také chyba (i když menší). Toto lze vyřešit tak, že počítám s pravděpodobností rekurzivně. Pravděpodobnost $P'(k)$, že v kroku k dorazí domů poprvé, je

$$P'(k) = P(k)_d \cdot \left(1 - \sum_{\substack{i=30 \\ i \text{ sudé}}}^{k-2} P'(i) \cdot P(k-i, 0, 0) \right) .$$

Potom

$$S_{100,d} = \sum_{\substack{k=30 \\ k \text{ sudé}}}^{100} P'(k) .$$

Takto lze vytouženou pravděpodobnost spočíst rekurzivně. Se svým titulem Mgr.^MM^ však zatím nemám oprávnění jakýmkoliv způsobem zjednodušovat, či jinak dále upravovat výrazy takovéto složitosti. Musím vás tedy odkázat na vaše počítačové vybavení ...

Na závěr snad jednu poznámku ohledně možnosti celý tento problém řešit počítačovou simulací, či počítáním pravděpodobnosti ve všech polích. Toto řešení, ač na první pohled neelegantní, je velmi výhodné, chceme-li do výpočtu zavést více „černých děr“, či jinak netypicky se chovajících míst. Postupujeme tak, že na počátku inicializujeme pole velikosti k^2 (k je předpokládaný počet simulovaných kroků) počátečním rozdělením pravděpodobnosti a novou hodnotu v každém poli zjistíme vhodným způsobem ze starých okolních hodnot. Časová složitost takového jednoduchého algoritmu je $O(k^3)$. (*Pozn. red.: To znamená, že pro n-krát větší k se doba výpočtu zvětší zhruba n^3-krát.*) Paměťová složitost je pak $O(k^2)$. Postupným zvětšováním plochy s rostoucím k bychom si sice trochu pomohli, ale nezlepšili bychom asymptotickou časovou závislost.

Pozn. red.: Myslím, že je už čas přejít k difusi, už proto, že ji toto téma nese ve svém názvu. Nuže, asi většině z vás neřeknu nic nového, když budu tvrdit, že difuse je v podstatě tentýž problém jako „opilec“. Malá částice se ve vzduchu, který neproudí, pohybuje pouze díky náhodným nárazům okolních molekul vzduchu. V případě těžkých velkých objektů se tyto nárazy neprojeví, ale u malých částeček pozorujeme náhodné změny směru pohybu (Brownův pohyb). S přechodem od opilce k difusi musíme vyřešit několik problémů: nárazy už samozřejmě neprobíhají v pravidelných intervalech a částice nechodí jen ve čtyřech směrech, ale je mnohem vybíravější. Nuže, navrhněte rozumný způsob, jak takovou difusi rozumně simulovat na počítači. Nezapomeňte na to, že intervaly mezi nárazy v plynu nejsou stejně dlouhé. A pokud se vám to zdá triviální, mám další otázky. Existuje nějaká vhodná velikost částice, abychom mohli Brownův pohyb pozorovat ve vzduchu jen pomocí oka nebo jenom lupy? A k tomu jeden příklad „ze života“. Představte si, že jste ve velmi velké místnosti a deset metrů od vás dohasínající cigareta „najednou“ vypustila do vzduchu 10^{22} částeček kouře. Budeme předpokládat, že v místnosti není žádné *proudění. Za jak dlouho můžete kouř ucítit? Nakolik se podílí difuse na přenášení pachů, vůní a kouře?*

Charlie

Řešení úloh

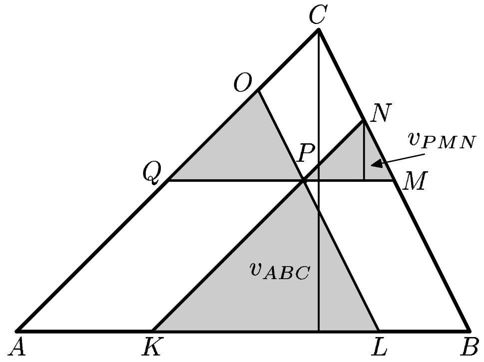
Úloha 3.1 – Obsah trojúhelníku (4b)

Zadání:

Nechť ABC je libovolný trojúhelník. Zvolme bod P, který leží uvnitř tohoto trojúhelníku, a veďme jím rovnoběžky s přímkami AB, BC a AC. Tyto přímky rozdělí trojúhelník na šest částí. Tři z nich jsou menší trojúhelníky. Určete obsah trojúhelníku ABC, znáte-li obsah každého z menších trojúhelníků.

Řešení:

Označme nejprve průsečíky přímek ze zadání po řadě K, L, M, N, O, P a Q. Situace je znázorněna na obrázku r1.1. Snadno dokážeme, například pomocí věty *uu*, že trojúhelníky KLP, PMN a QPO jsou podobné trojúhelníku ABC. Důležité je uvědomit si, že z tohoto faktu plynou následující rovnosti mezi základnami a výškami zmíněných trojúhelníků



Obr. r1.1

$$k := \frac{v_{ABC}}{|AB|} = \frac{v_{KLP}}{|KL|} = \frac{v_{PMN}}{|PM|} = \frac{v_{QPO}}{|QP|}\,. \tag{r1.1}$$

Neznámou k jsme označili (kladný) koeficient podobnosti. Obsah trojúhelníku ABC proto můžeme vyjádřit vztahem

$$S_{ABC} = \frac{|AB|\,v_{ABC}}{2} = \frac{k|AB|^2}{2} \tag{r1.2}$$

a obdobně pro menší trojúhelníčky máme

$$S_{KLP} = \frac{|KL|^2 k}{2}\,, \tag{r1.3}$$

$$S_{PMN} = \frac{|PM|^2 k}{2}\,, \tag{r1.4}$$

$$S_{QPO} = \frac{|QP|^2 k}{2}\,. \tag{r1.5}$$

Zřejmě je $|AK| = |QP|$ a $|LB| = |PM|$ (dokažte!), takže

$$|AB| = |QP| + |KL| + |PM|\,. \tag{r1.6}$$

Zkusme proto vyjádřit po řadě délky $|KL|$, $|PM|$ a $|QP|$ ze vztahů (r1.3), (r1.4) a (r1.5) a dosadit do (r1.6). Dostáváme

$$|AB| = \sqrt{\frac{2S_{KLP}}{k}} + \sqrt{\frac{2S_{PMN}}{k}} + \sqrt{\frac{2S_{QPO}}{k}}\,. \tag{r1.7}$$

Konečně dosazením tohoto výrazu do (r1.2) vychází

$$S_{ABC} = \frac{k}{2}\left(\sqrt{\frac{2S_{KLP}}{k}} + \sqrt{\frac{2S_{PMN}}{k}} + \sqrt{\frac{2S_{QPO}}{k}}\right)^2 . \tag{r1.8}$$

Po vytknutí výrazu $\sqrt{2/k}$ a po jeho umocnění dospějeme ke vztahu

$$S_{ABC} = \left(\sqrt{S_{KLP}} + \sqrt{S_{PMN}} + \sqrt{S_{QPO}}\right)^2 , \tag{r1.9}$$

který lze upravit do („méně symetrického“) tvaru

$$\begin{aligned} S_{ABC} = {} & S_{KLP} + S_{PMN} + S_{QPO} + \\ & + 2\left(\sqrt{S_{KLP}\,S_{PMN}} + \sqrt{S_{PMN}\,S_{QPO}} + \sqrt{S_{QPO}\,S_{KLM}}\right), \end{aligned} \tag{r1.10}$$

čímž je úloha vyřešena.

Mirek

Úloha 3.2 – Fotograf (5b)

Zadání:

Jakou clonu má nastavit fotograf, který fotí fotoaparátem s objektivem s ohniskovou vzdáleností 35 mm, *aby měl na záběru ostré dva zajímavé předměty? Jeden je ve vzdálenosti* 2 m *a druhý* 10 m *od fotografa. (Clonové číslo je poměr f/d ohniskové vzdálenosti f a průměru d otvoru [přesněji vstupní pupily] objektivu.)*

Použitý film má políčko o rozměrech 36 × 24 mm, *které obsahuje přibližně 15 milionů světlocitlivých zrnek.*

Řešení:

Vzhledem k tomu, že počítat s přesným složením objektivu by bylo neúměrně složité (a navíc toto složení ani nebylo zadáno), provedu v následujícím řešení několik zanedbání. Objektiv budu považovat za jednu tenkou čočku. Clona bude umístěna „ve stejném místě“, takže čočkou mohou projít pouze paprsky, které jsou k optické ose blíže než $d/2$ (kde d je průměr otvoru clony). Ostření zjednoduším na nastavování vzdálenosti mezi čočkou a filmem. (Ve skutečnosti se při ostření mění i ohnisková vzdálenost objektivu.) Oprávněnost těchto zanedbání si promyslete sami.

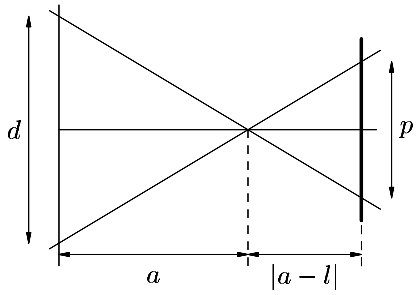
Vzdálenost obrazu určíme podle vzorce známého z geometrické optiky

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a'}\,, \tag{r2.1}$$

kde f je ohnisková vzdálenost objektivu a vzdálenost a resp. a' je vzdálenost předmětu, resp. obrazu (obě beru s kladným znaménkem). Není tedy těžké spočítat, že za předpokladu $f = 35\,\mathrm{mm}$ se naše dva předměty zobrazí do vzdáleností $a'_1 = 35{,}62\,\mathrm{mm}$ a $a'_2 = 35{,}12\,\mathrm{mm}$.

Vzdálenost filmu od čočky označme l. Pokud není l rovno vzdálenosti obrazu, bude tento více či méně rozmazaný. Jako míru rozmazání budeme brát průměr p kolečka, které se na filmu objeví tam, kde by měl být jediný bod. Z podobnosti trojúhelníků (viz obr. r2.1) plyne

$$p_1 = \frac{|a'_1 - l|}{a'_1}\, d\,, \qquad p_2 = \frac{|a'_2 - l|}{a'_2}\, d\,. \tag{r2.2}$$



Obr. r2.1

Chceme najít takové l, aby maximum obou rozmazání (tj. $\max(p_1, p_2)$) bylo co nejmenší. V našem případě je to pro $p_1 = p_2$. (Rozmyslete si, z čeho to plyne.) Spočteme příslušnou vzdálenost filmu: $l = 35{,}37\,\mathrm{mm}$.

Pokud bude rozmazaná stopa pokrývat pouze jedno zrníčko, bude i tak fotografie maximálně ostrá (na daném filmu už není možné vytvořit ostřejší obrázek). Na jedno zrníčko připadá plocha asi $58\,\mu\mathrm{m}^2$, tedy vzdálenost sousedních zrníček bude přibližně $7{,}6\,\mu$m. Ostrou fotografii tedy získáme, pokud bude platit $p_1 = p_2 < 7{,}6\,\mu\mathrm{m}$. Podle vztahů (r2.2) vychází pro maximální průměr otvoru clony

$$d = 141 \cdot 7{,}6\,\mu\mathrm{m} = 1{,}1\,\mathrm{mm}\,. \tag{r2.3}$$

Hledané clonové číslo potom vychází asi 33. Nejbližší z normalizované řady je 32, případně pak 45.

Vypadá to, že řešení už máme. Jenže tomu tak bohužel není. Když se podíváte na běžné (tedy ne teleskopické) objektivy uvidíte, že clonová čísla končí většinou u 16, občas se ještě najde 22, ale vyšší čísla už moc ne. Nabízí se otázka proč. Kvůli nízkému osvětlení filmu to nebude. Pokud fotíte za jasného dne na sněhu, máte často nastavenou závěrku i clonu „nadoraz“. Ale už jste možná někdy viděli fotografie, na kterých bylo sluníčko „roztaženo“ do několikacípé hvězdy. Vždy je to na fotografiích focených s poměrně vysokým clonovým číslem.

U všech optických přístrojů totiž kromě výše zkoumané geometrické optiky hrají roli i ohybové jevy. V případě malých otvorů nebo velkých zvětšení je už nelze zanedbat.[5] To že na fotografiích vidíme hvězdu je dáno tvarem otvoru ve cloně. V případě, že by byl přesně kruhový, dostaneme kolem Slunce několik soustředných kružnic s postupně klesající intenzitou.

[5] Proto také třeba nenajdete optický mikroskop, který by zvětšoval řádově více než tisíckrát.

Pro další odhad nás bude zajímat poloha prvního minima ohybového obrazce. Stopu vzniklou z jednoho bodu (tedy ekvivalent míry rozostření definovaného výše) budeme uvažovat s poloměrem daným právě vzdáleností prvního minima.

Pro přibližný odhad nám bude stačit vzorec pro ohyb rovnoběžných paprsků, který dává velmi jednoduchý vztah

$$r_\mathrm{d} = \frac{l\lambda}{d}\,, \tag{r2.4}$$

kde r_d je vzdálenost prvního minima v rovině filmu. Míra rozostření způsobeného difrakcí je tedy

$$p_\mathrm{d} = \frac{2l\lambda}{d}\,. \tag{r2.5}$$

Ze stejného důvodu jako výše nastává minimum $\max(p_1(d), p_\mathrm{d}(d))$ pro takové d, kdy $p_1 = p_\mathrm{d}$. Tedy po dosazení vlnové délky 500 nm vychází vhodný průměr otvoru $d = 2{,}2\,\mathrm{mm}$ a clonové číslo asi 16.

Míra rozostření je i po vyvolání fotografie a pětinásobném zvětšení (tj. na „běžnou“ velikost) menší než desetina milimetru, což se podle literatury[6] jeví lidskému oku jako ostré.

Fotograf tedy nemůže nastavit clonu tak, aby byla fotografie ostrá až na maximum dané kvalitou filmu. Nejvhodnější clonové číslo, které může na aparátu nastavit je 16. V tomto případě získá dostatečně ostrou fotografii (pokud ji nepotřebuje zvětšovat například na plakát).

Marble

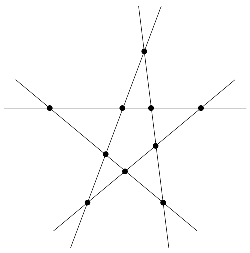
Úloha 3.3 – Body na přímce (3b)

Zadání:

Umístěte do roviny 10 bodů tak, aby tvořili 5 řad po 4 bodech. Řada má n bodů tehdy, když existuje přímka, která prochází právě n body.

Řešení:

Jedno z možných řešení vidíte na obrázku r3.1. Pojďme se ale podrobněji zamyslet, jestli takové řešení je jediné možné ve smyslu počtu bodů společných více řadám. Místo o řadách budeme dále mluvit o přímkách, na kterých leží 4 význačné body.



Obr. r3.1

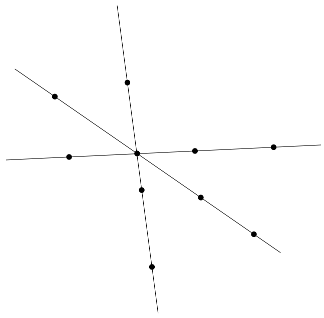
Ze zadání vyplývá, že bude vhodné volit přímky tak, aby body ležely v jejich průsečících (takové body pak náleží více přímkám a „počítají“ se proto vícekrát). Důležité je připomenout, co platí pro dvě přímky, které se protínají v jednom bodě. Takové přímky pak mají buď nekonečně mnoho společných bodů, tedy splývají

[6] Klimeš, Kracík, Ženíšek: Základy fyziky II., Academia Praha, str. 459

(a jsou pro nás nezajímavé, protože vyniklá řada by nesplňovala zadání – měla by více než n bodů), nebo mají společný právě jeden bod. Proto pokud by existoval bod, který je průsečíkem čtyř (resp. pěti) přímek, pak by už tyto přímky nemohly mít žádný další společný bod a muselo by na nich ležet $4 \cdot 3 = 12$ (resp. $5 \cdot 3 = 15$) dalších bodů, což není možné. Může řešení úlohy vyhovovat situace, kdy je alespoň jeden bod průsečíkem tří přímek? Na těchto přímkách musí ležet dalších $3 \cdot 3 = 9$ bodů, tím jsme ale vyčerpali 10 bodů ze zadání, a nemůžeme již žádný přidat (viz obr. r3.2). Nám se ale nepodaří najít čtvrtou přímku, na níž by ležely čtyři body – musela by mít s nějakou existující přímkou společné alespoň dva body, a to, jak už víme, nelze.

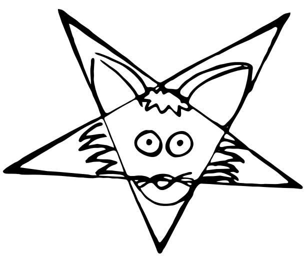
Docházíme k tomu, že řešením úlohy budou body, které leží na jediné nebo zároveň na dvou přímkách. Tušíme, že není výhodné uvažovat body, které leží pouze na jedné přímce. Ukažme konečně, že žádný takový bod nemůže v řešení existovat, pročež je řešením 10 bodů, z nichž každý náleží dvěma různým přímkám (řadám).

Přiřadíme-li každé přímce jedno z písmen A, B, C, D a E, můžeme pak každému z deseti bodů přiřadit „jméno" – písmeno P s indexem posloupnosti jednoho či dvou znaků daných přímkou (přímkami), na kterých leží (na pořadí písmen nezáleží). Náleží-li např. bod přímkám B, D, bude se „jmenovat" P_{BD}, náleží-li pouze přímce E, bude jmenovat P_E. Zatímco jednopísmenným stejným indexem se může „jmenovat" více bodů, dvoupísmenným nikoli (víte proč?). Teď si stačí uvědomit, že ve jménech bodů se musí každé z písmen A, B, C, D, E vyskytnout právě čtyřikrát, musí se tedy v indexech objevit 20 písmen. Ale každý bod má maximálně dvoupísmenné „jméno", takže je k dispozici nejvýše 20 indexových pozic, a ty musí být proto bezezbytku využity.



Obr. r3.2

Našli jsme nutnou podmínku pro řešení úlohy. Protože zřejmě žádná pětice přímek, z nichž alespoň dvě jsou rovnoběžné a žádné tři nemají společný bod, tuto podmínku nesplňuje a jiné vzájemné polohy přímek nemá smysl uvažovat, dostáváme tvrzení: *Všechny průsečíky libovolných pěti přímek takových, že žádné dvě nejsou rovnoběžné a žádné tři nemají společný bod, řeší zadání. Žádná další řešení neexistují.*



Poznámky k došlým řešením. Vaše řešení byla vesměs správná, našli se ale odvážlivci tvrdící, že počet řešení je omezený. Když už takovou hypotézu vyslovíme, je dobré ji podložit alespoň náznakem důkazu. Jinak jsem uděloval prémiové body všem, co se nespokojili s pouhým nákresem řešení a poslali více či méně podložené postačující podmínky řešení.

Mirek

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t2	t3	t5	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.^{MM} Eva Černohorská	49	4		4		12		20	49
2.	Mgr.^{MM} Jan Musílek	42	4	4	3				11	42
3.	Mgr.^{MM} Peter Perešíni	35	4	4	4				12	35
4.	Dr.^{MM} Jozef Cmar	59	1		4	1	2		8	34
5–6.	Dr.^{MM} Tereza Klimošová	72	4		4				8	33
	Mgr.^{MM} Zbyněk Konečný	33	4		4		10		18	33
7.	Dr.^{MM} Stanislav Basovník	91			3	8	5		16	27
8.	Mgr.^{MM} Tomáš Gavenčiak	33	4	1	4			4	13	26
9.	Dr.^{MM} Lenka Studničná	94	4	2	3				9	24
10.	Dr.^{MM} Jan Olšina	78								23
11–12.	Mgr.^{MM} Peter Greškovič	22	3	0	4				7	22
	Mgr.^{MM} Luboš Ptáček	22			4				4	22
13–14.	Mgr.^{MM} Jindřich Soukup	31	4		3	2			9	21
	Mgr.^{MM} Štěpánka Mohylová	25			3				3	21
15.	Mgr.^{MM} Petr Dostál	20								20
16.	Prof.^{MM} Martin Demín	251	1	4	4				9	17
17–18.	Bc.^{MM} Petr Morávek	15								15
	Bc.^{MM} Zuzana Safernová	15	4		4				8	15
19–20.	Dr.^{MM} Michal Demín	67	1	4	4				9	14
	Mgr.^{MM} Jana Babováková	48								14
21–22.	Doc.^{MM} Tomáš Štec	192								13
	Bc.^{MM} Martin Konečný	13	1	0	3				4	13
23–25.	Dr.^{MM} Helena Kubátová	55	4		3				7	12
	Bc.^{MM} Jaroslav Šeděnka	12			3				3	12
	Bc.^{MM} Miroslav Vetrik	12								12
26–31.	Mgr.^{MM} Karla Procházková	37			3				3	11
	Bc.^{MM} Monika Martinisková	16								11
	Bc.^{MM} Jiří Borkovec	11								11
	Bc.^{MM} Michal Matych	11	4		4				8	11
	Bc.^{MM} Jana Przeczková	11	2		3				5	11
	Bc.^{MM} Adam Šugl	11			3				3	11
32–37.	Mgr.^{MM} Ľuboš Uličný	27			3				3	10
	Mgr.^{MM} Petra Malá	25	4		4				8	10
	Bc.^{MM} Kateřina Böhmová	10			4				4	10
	Bc.^{MM} Jan Havlik	10								10
	Bc.^{MM} Martin Holeček	10			3				3	10
	Bc.^{MM} František Konopecký	10								10
38.	Mgr.^{MM} Vojtěch Kubáň	34								9

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t2	t3	t5	$\sum_0$	$\sum_1$
39–44.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Dungl	20	4		4				8	8
	Tereza Hlaváčová	8								8
	Jan Křivonožka	8	4	1	3				8	8
	Jiří Milička	8								8
	Marek Scholz	8								8
	Jan Uhlík	8	4		4				8	8
45.	Tomáš Javůrek	7								7
46–48.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Růžek	49								6
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Rieger	18								6
	Antonín Špaček	6								6
49.	Martin Suchan	5			1				1	5
50.	Pavel Procházka	4								4
51–55.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Dana Beránková	80			3				3	3
	Richard Bobek	6			3				3	3
	Hana Suchomelová	3								3
	Přemysl Šrámek	3								3
	Zdeněk Vais	3			3				3	3
56–58.	Milan Dvořák	2								2
	Jan Šácha	2								2
	Ondřej Tkáč	2								2
59–61.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Zuzana Rozlívková	84			1				1	1
	Pavla Grubhofferová	6								1
	Jiří Krejčí	1								1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.