Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník X číslo 4

Termín odeslání: 23. 2. 2004

Je nám líto, že začínáme nový rok zrovna následující zprávou. Měli byste ale vědět, že jeden z našich řešitelů, Petr „Dasty" Dostál, už není mezi námi. Třetího ledna na něj při práci v lese spadl strom.

Milí řešitelé,

přejeme vám do nového roku hodně úspěchů a splněných snů a přání, dávejte na sebe pozor a užívejte si naplno každé chvilky života.

Chtěli bychom vám napsat alespoň jednu dobrou zprávu. Plánujeme jarní soustředění, které se bude konat 13.–21. března 2004 poblíž Vsetína. Jestli už teď víte, že nebudete moci přijet, napište nám to spolu s řešením tohoto čísla. Stejně tak napište, pokud víte, že určitě přijet chcete. Body pro účast na soustředění můžete získat ještě řešením úloh z tohoto čísla a všech témat.

Redakce M&M

Zadání úloh

Úloha 4.1 – Kondenzátor (5b)

Mějme nabitý otočný kondenzátor[1], na jehož svorkách je napětí U. Připojíme k němu odpor R, přes který se bude vybíjet. Přitom chceme, aby napětí na svorkách kondenzátoru (nebo odporu) zůstávalo stále U. Jak toho můžeme docílit?

Spočítejte energii, která se během celého vybíjení spotřebovala na odporu. Spočítejte také energii, která by se spotřebovala v případě, že bychom nechali kondenzátor vybíjet bez regulování napětí. Co znamenají získané výsledky a jak je vysvětlíte?

Úloha 4.2 – Číslování bodů (5b)

Je dána pravoúhlá mřížka $n \times m$ bodů. Očíslujte v ní jednotlivé body čísly $1, 2, 3, \ldots, m \cdot n$ tak, aby součet absolutních hodnot rozdílů všech dvojic čísel spojených hranou byl co nejmenší.

[1] Otočný kondenzátor je takový, u kterého se dá otáčením desek měnit plocha kondenzátoru, a tudíž i jeho kapacita.

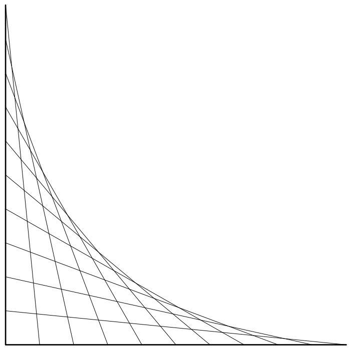
Úloha 4.3 – Čokoláda v sodovce (5b)

Vezměte kousek čokolády a ponořte jej do sodovky (nebo libovolné „perlivé“ vody). Pozorujte, co se bude dít, a pokuste se určit závislost pozorovaného jevu na různých parametrech experimentu. Zkuste své výsledky alespoň kvalitativně zdůvodnit.

Zadání témat

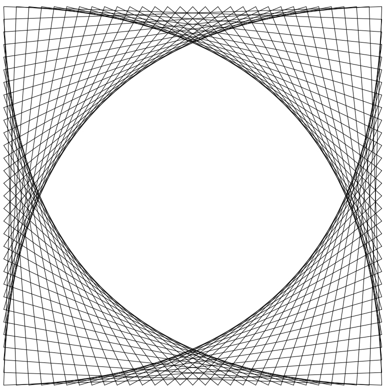
Téma 6 – Grafika

Marble si během nudných hodin na gymnáziu rád kreslil obrázky podobné těm, které vidíte kolem. Základní tvar, který je zobrazen na obrázku 1, vznikne velmi jednoduše. Na dvě kolmé polopřímky vycházející z jednoho bodu se nanese stejný počet značek v konstantních rozestupech. Pak se úsečkou spojí první značka na jedné polopřímce s poslední značkou na druhé. Potom druhá značka s předposlední, … Po spojení poslední značky s první vznikne výsledný obrázek.

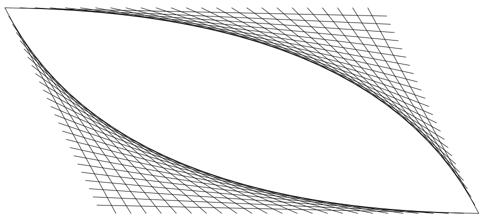


Obr. 1

Zajímavým prvkem je hranice vyšrafované oblasti. V případě, že by jednotlivé značky byly rozmístěny nekonečně blízko u sebe a nakreslilo by se nekonečno spojnic, přejde v nějakou hladkou křivku. Otázka pro vás je zjistit, o jakou křivku jde. Můžete ji popsat rovnicí nebo ji (v případě, že má jméno) pojmenovat.



Základní úloha se týká křivky podle obrázku 1, ale můžete se zamyslet i nad složitějšími případy – polopřímky svírají obecný úhel, vzdálenosti značek jsou jiné na každé polopřímce apod.



Dá se výše popsaná konstrukční metoda použít i pro jiné typy křivek? Pro jaké? A jak ji bude třeba upravit?

Téma 7 – Křižovatky

Představte si, že máte možnost účastnit se návrhu silniční sítě ve městě. Vymyslete model, který popisuje provoz na silnicích s křižovatkami a se semafory. (Stavět mimoúrovňové křížovatky je ve městě většinou obtížné, takže je potřeba optimalizovat obyčejné „ploché" křižovatky.) Na jeho základě pak zkuste navrhnout takové řešení silniční sítě, aby se pokud možno zamezilo vzniku „dopravní zácpy", aby se dalo městem cestovat co nejrychleji, aby se minimalizovala spotřeba pohonných hmot atd. Můžete vymyslet další důležitá kritéria.

Nechceme po vás kompletní návrh. Spíš se zamyslete nad konkrétními detaily, které je vhodné splnit. Jak budou vypadat křižovatky? Budou řízeny světelnou signalizací? Pokud ano, jakým způsobem bude nastavena? Kdy je výhodnější postavit kruhový objezd místo světelné křižovatky? Vyplatí se udělat některé silnice jednosměrné? A jak bude vhodná silniční síť záviset na předpokládané hustotě dopravy?

Pro začátek si můžete představit jednu nebo dvě křižovatky a určité množství aut, která chtějí skrz tyto křižovatky někam projet. Pokud si dostatečně vyhrajete a dvě křižovatky vám nebudou stačit, zkuste si navrhnout silniční síť v menším městě.

Řešení témat

Téma 1 – Oko a stroboskopie

Černobílé a barevné rotující disky

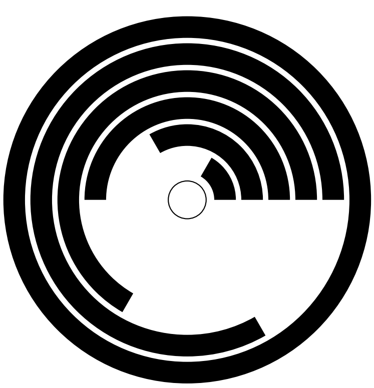
Dr.^MM^ Josef Cmar

Pozn. red.: Dr.^MM^ Josef Cmar nám zaslal 12 disků. První čtyři pocházejí z webové stránky `http://www.archimedes-lab.org/top_toupie_trottola.pdf`.

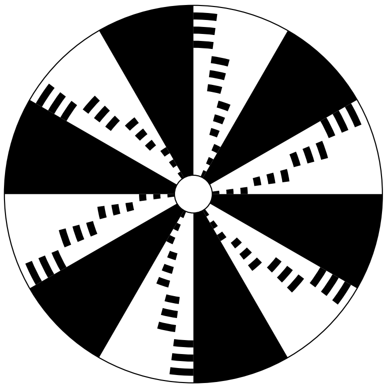
K pozorování jsem použil setrvačník vymontovaný z autíčka, na který jsem lepil jednotlivé disky. Vysokou frekvencí budeme dále rozumět frekvence zhruba desítek hertzů, nízkou frekvencí jednotky hertzů.

Disk č. 1: Při vysoké frekvenci jsou na vnitřním okraji zcela světlá (bílá) mezikruží, která směrem k okraji tmavnou. Při nižší frekvenci se od středu začínají objevovat tmavé skvrny a s klesající frekvencí se skvrny pohybují dál od středu a obraz se stává zřetelnějším.

Disk č. 2: Při vysoké frekvenci můžeme pozorovat střídání světlejších a tmavších mezikruží, tmavá jsou tvořena černými čárkami. Při nižší frekvenci se obraz stává trhaný, objevují se černé a bílé „vrtulové" proužky. Ještě těsně před zastavením můžeme pozorovat, že černá barva tvoří souvislé mezikruží, a není možno poznat, že je přerušovaná.

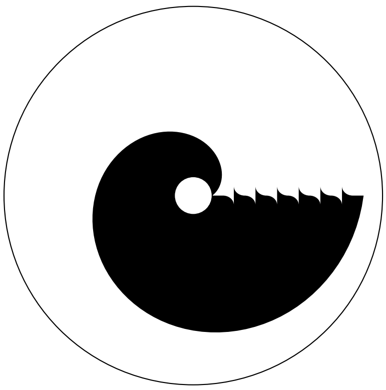


Disk 1

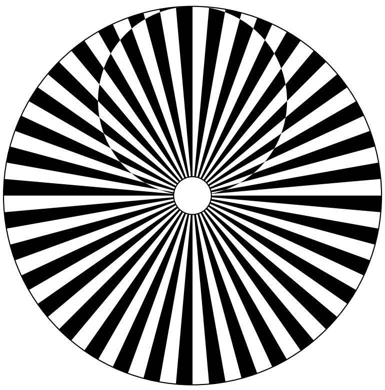


Disk 2

Disk č. 3: Při vysoké frekvenci je střed nejtmavší a směrem k okraji se zesvětluje, při nižší již lze pozorovat, že ze středu vybíhá černá barva, která se směrem k okraji vytrácí. V místech, kde vychází 6 zubů, můžeme při vysoké frekvenci pozorovat zřetelně tmavší tenké černé čárky (tedy kružnice).



Disk 3

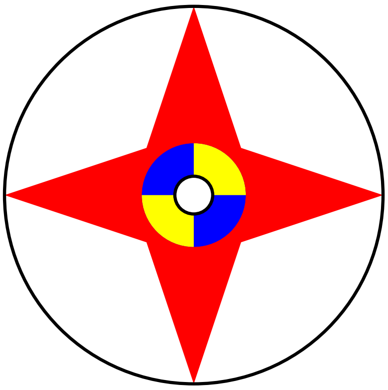


Disk 4

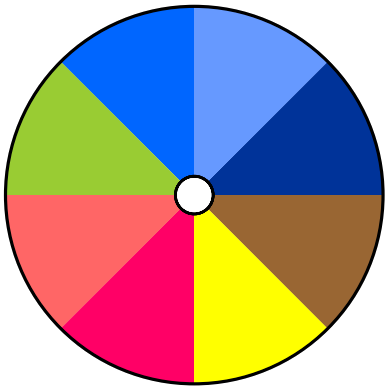
Disk č. 4: Při vysoké frekvenci můžeme pozorovat prakticky kompletně šedé kolečko, při zpomalení rotace lze vidět tmavou, rychle se pohybující skvrnu a také „vrtulové“ proužky[2] černé a bílé barvy. Při nízké frekvenci je již místo s odlišným vzorem jasně vidět, zatímco konkrétní černé a bílé proužky jsou vidět až při zastavení.

Disk č. 5: Při vysoké frekvenci je vidět nazelenalý střed, kolem něj červené mezikruží. Se vzdalováním od středu se červená mění v růžovou

[2] *Pozn. red.: Vypadá to, jako by se disk na okamžik prudce zastavil. Vyzkoušejte si sami, těžko se to popisuje.*



Disk 5 (hvězda je červená, vnitřní kruh žluto-modrý)

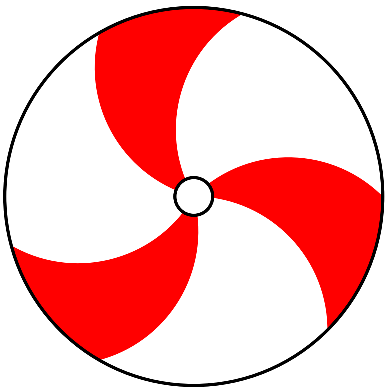


Disk 6 (barvy jednotlivých výsečí jsou postupně: hnědá, žlutá, růžová, oranžová, zelená, modrá, světle modrá a tmavě modrá)

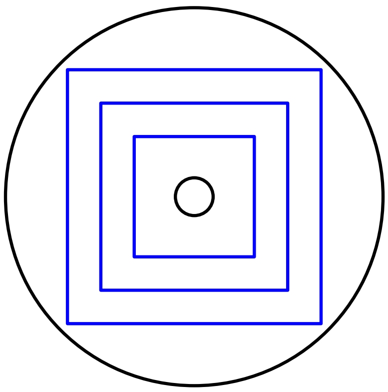
a postupně zaniká. Při nižší frekvenci je kolem středu vidět přechody mezi modrou a žlutou, zatímco zbytek je tvořen mnohacípou hvězdou, jejíž hroty jsou směrem k venkovnímu okraji více rozmazány. Ani při ještě nižší frekvenci oko nepozná, z kolika cípů je hvězda složená.

Disk č. 6: Při vysoké frekvenci vznikla souvislá barva, kterou nedokáži popsat. Při nižší frekvenci se kruh skládal z oranžové a zelené části, později můžeme rozlišit jednotlivé barvy, jako poslední jsem rozlišil barvu hnědou.

Disk č. 7: Při vysoké frekvenci můžeme pozorovat jednotnou načervenalou barvu, při nižší frekvenci se již obraz stává trhaný a můžeme pozorovat střídání bílých a červených proužků.



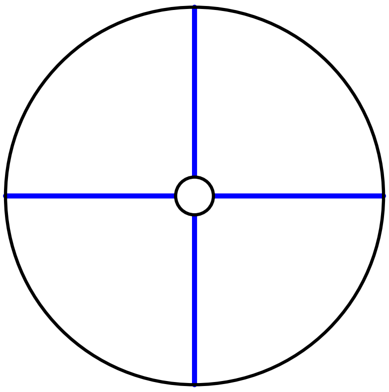
Disk 7 (paprsky jsou červené)



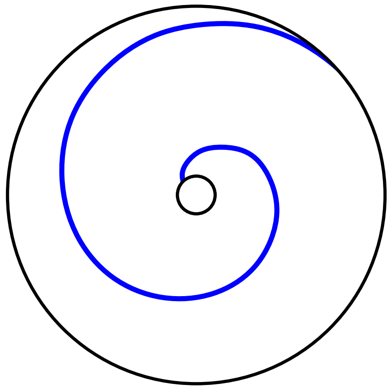
Disk 8 (barva čtverců je modrá)

Disk č. 8: Při vysoké frekvenci jsem pozoroval tři kružnice modré barvy. Nikoho z lidí, kterým jsem rotující kotouč ukazoval, nenapadlo, že vzor mohou tvořit čtverce místo kružnic.[3] Při nízké frekvenci se kružnice stávají trhanější a můžeme kolem nich pozorovat namodralé skvrny.

Disk č. 9: I tento disk mě překvapil. Při vysoké frekvenci byla modrá barva prakticky nezjistitelná díky vysokému podílu bílé barvy. Při nízké frekvenci můžeme blízko středu pozorovat krátké, velmi nezřetelné proužky modré barvy. Kříž se stává zřetelný až těsně před zastavením.



Disk 9 (kříž je modrý)



Disk 10 (spirála je modrá)

Disk č. 10: Při vysoké frekvenci můžeme pozorovat modré kolečko kolem středu, při nižší frekvenci můžeme vidět, jak se čára namotává ke středu nebo odmotává od středu podle toho, kterým směrem kolečko roztočíme.

Pozn. red.: Farebné disky môžete nájsť na `http://mam.mff.cuni.cz/zajimavosti/stroboskopie/kruhy.eps.gz`

Závěry

Při vysokých frekvencích vidíme děje jako spojité, navíc dochází k míchání barev a matení oka. Barva, kterou při vysoké frekvenci vidíme, vůbec nemusí být ta, která je na disku.

Při nízkých frekvencích oko registruje pohyb jako trhaný, dokáže rozeznat jednotlivé složky barvy.

V případě, že se disk točí, oko registruje jakékoliv skvrny na disku jako kružnice nebo mezikruží.

Pozn. red.: Autor popisuje niekoľko zaujímavých aj „paradoxných“ experimentov. Nájdete podobné paradoxné disky, kde rotujúci disk vyzerá úplne inak ako disk v pokoji? Dokážete vysvetliť, prečo jednotlivé disky vnímame tak, ako ich vnímame?

---

[3] *Pozn. red.: Preskúmajte, ktorá čiast disku je za kružnice zodpovedná.*

Opět něco z historie

Mgr.[MM] Jindra Soukup

Jak to bylo za starých časů

Iluzi pohybu způsobuje to, že mozek nezpracovává obraz nepřetržitě. Struktura světla a barev se otiskne na sítnici, která ji přenese do mozku. Mozek si tuto strukturu zachová po zlomek sekundy.

Pokud v tomto intervalu dojde k malé změně scény a přijde druhá, lehce změněná zpráva, mozek ji zpracuje dřív, než první odezní. Vytváří tak plynulý přechod mezi nimi. Pokud takovéto drobné změny následují ustavičně, mozek interpretuje postupný proud změn jako pohyb.

Tento fenomén „setrvačnosti vidění“ byl zaznamenán již v prastarých časech. Kolem roku 130 n. l. řecký učenec Claudius Ptolemaios (100–170), který pracoval v Egyptě, napsal své velké dílo o řecké astronomii. V této knize mimochodem uvedl, že jestliže se vybarví část kotoučku a pak se jím začne rychle otáčet, vypadá to, jako by byl barevný celý kotouček. Děje se tak právě díky setrvačnosti vidění.

Iluze pohybu

První člověk, který využil setrvačnosti vidění praktickým způsobem, byl anglický doktor J. A. Paris. V roce 1826 si vyrobil lepenkový kotouč. Na jednu jeho polovinu nakreslil kmen stromu s větvemi, ale bez listů. Na druhou pak nakreslil patřičně umístěné listí, ovšem bez větví a kmene. Lepenkový kotouč byl zavěšen na hedvábných vláknech tak, že když se nitě rychle otáčely mezi palcem a ukazováčkem, kotouč se rychle roztočil. V takovém případě jste viděli obě poloviny kotouče najednou, neboť první ještě neodezněla, když se vám v zorném poli objevila druhá. Viděli jste strom s listím. Paris to nazval „thaumatropem“, což by se dalo z řečtiny přeložit přibližně jako „divotoč“.

V roce 1832 vyrobil belgický fyzik Joseph A. F. Plateau (1801–1833) válec se štěrbinami v bocích takový, že když se roztočil, mohli jste se dívat těmito štěrbinami postupně v rychlém sledu. To, co jste viděli, bylo sice trochu rozmazané, ale kontinuální, neboť váš mozek si podržel obraz zachycený skrz jednu štěrbinu až do chvíle, kdy jste se dívali skrz další. Uvnitř válce byl druhý válec, na kterém byly namalovány obrázky, které se postupně měnily. Bylo tam také zrcadlo umístěné tak, že každý obrázek byl viditelný skrze štěrbinu natočenou k pozorovateli, jeden po druhém. Když se válec roztočil, připadalo pozorovateli, že se dívá na pohybující se objekt. Přirozeně, jednalo se jen o jediný pohyb, který byl dokončen v průběhu jednoho otočení válce, a pak se stále opakoval, ale stejně to byla úžasná věcička pro ty, kteří něco takového viděli poprvé.

Do dvou let britský matematik Willlam George Homer (1786–1837) modifikoval tento vynález, aby pohybující se obraz mohlo sledovat několik lidí najednou. Vylepšil rovněž válec s měnícími se obrázky. Své zařízení nazval „zoetrop“ (z řeckého „život“ a „točit“ nebo „kolo života“, protože pohyb je těsně spjat se živými bytostmi).

V roce 1853 se baron von Uchatius (1811–1881), rakouský důstojník od dělostřelectva, pokusil učit pochodování na přehlídkách za použití postupných obrázků. Vypracoval způsob, jak tyto obrázky promítat jeden za druhým na plátno, a nakonec dokázal promítnout třicet sekund pochodování celé přihlížející rotě vojáků. Se svou třicetisekundovou iluzí pohybu držel rekord po následujících čtyřicet let.

Ve von Uchatiusových časech byla objevena fotografie. Nebylo příliš těžké přijít na to, že kdyby se nějak podařilo pořídit sérii fotografií následujících rychle za sebou, a pak je stejně rychle promítnout, iluze pohybu by byla dokonalejší než cokoliv, čeho mohlo být dosaženo s obrázky.

Nakonec byly potřebné techniky pro rychlé fotografování a rychlé promítání objeveny, ale trvalo to celé půlstoletí.

Jak to vlastně bylo s tím koněm

První člověk, který ukázal důležitost studování pohybu prostřednictvím fotografií, byl britsko-americký fotograf Eadweard Muybridge (1830–1904), který se přestěhoval do Spojených států, aby se účastnil kalifornské zlaté horečky.

V té době nikdo do detailu nevěděl, jak vlastně běží kůň. Dokonce ani bedlivý pozorovatel, který si všimne, že koně pohybují každou nohou nezávisle, nedokáže vypozorovat přesné podrobnosti, protože se nohy koní pohybují příliš rychle.

Leland Stanford (1824–1893), který byl guvernérem Californie od roku 1861 do roku 1863, byl milionář, jenž se zabýval šlechtěním závodních koní. Tvrdil, že v určitém momentu cvalu se všechny čtyři nohy koně nacházejí současně ve vzduchu. Jeho rival v oboru šlechtění koní byl přesvědčený, že tomu tak není, a oba vsadili na svá stanoviska 25 000 dolarů (což byla v té době úctyhodná částka). Jediný problém spočíval v tom, že se zdálo, že neexistuje žádný způsob, jak jejich spor rozhodnout. Žádné pozorování cválajících koní nevedlo k jednoznačnému závěru v tom či onom směru.

Tehdy, v roce 1872, najal Stanford Muybridge, aby celou záležitost vyřešil. Muybridge napnul přes závodní dráhu dvanáct provázků a konec každého z nich připevnil k závěrce jednoho fotografického aparátu. Cválající kůň provázky postupně přetrhával, a spouštěl tak jeden přistroj za druhým, takže získali dvanáct fotografií. Fotografie byly následně prozkoumány. Na jedné z nich byl kůň se všema čtyřma nohama ve vzduchu a Stanford vyinkasoval svých 25 000 dolarů.

Tím se stalo naprosto jasné, že fotografie je nejlepší metoda ke studiu pohybu, a Muybridge strávil několik let pořizováním fotografií pohybujících se objektů v krátkých intervalech.

Literatura

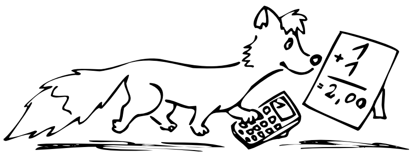
[1] Isaac Asimov: Iluze pohybu, Fantasy & Science Fiction 1/1998, Czech Edition

Bzučo

Téma 4 – Odpory a mřížky

Došlých řešení se objevilo poměrně málo, proto přemýšlejte dále, námětů je dostatek. Někteří z vás se pokusili spočítat odpor mřížky rozměrů $n \times m$, bohužel všichni udělali alespoň jednu početní chybu, proto jejich řešení neotiskujeme a zasíláme je autorům na přepracování.

Jirka & Bzučo



Téma 5 – Opilec aneb difuse trochu jinak

Podle počtu došlých řešení usuzuji, že buďto se většina z vás příkladu zalekla, nebo měla pošta obzvláště špatné období. Ať tak, či onak, kvalita řešení předčila má očekávání. Ti tři stateční, kteří bojovali s vratkou chůzí opilce, byli *Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská*, *Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar* a *Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek* – podívejme se blíže na jejich výsledky.

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek ve svém řešení kombinuje matematické metody a počítač. Kompletní řešení a použité programy naleznete na internetu na stránkách `http://sweb.cz/janmusilek`.

Opilec na šachovnici

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek

Můžu si představit, že se opilec pohybuje po velké (teoreticky neomezené) šachovnici. Jednotlivým polím přidělím souřadnice x a y tak, že výchozí pole má souřadnice $[0, 0]$ a při pohybu opilce z pole $[x, y]$ dopředu se souřadnice změní na $[x, y + 1]$, dozadu na $[x, y - 1]$, doleva na $[x - 1, y]$ a doprava na $[x + 1, y]$.

Jestliže znám počty způsobů, kterými se opilec může dostat na různá pole šachovnice po k krocích, mohu snadno zjistit počty způsobů po $k + 1$ krocích tak, že jednoduše sečtu dané počty způsobů po k krocích na čtyřech sousedících polích. Tedy takto:

			1			

$k = 0$

			1			
		1		1		
			1			

$k = 1$

			1			
		2		2		
	1		4		1	
		2		2		
			1			

$k = 2$

			1			
		3		3		
	3		9		3	
1		9		9		1
	3		9		3	
		3		3		
			1			

$k = 3$

A tak dále. Tímto způsobem můžu pokračovat dál, ale raději jsem napsal skript, který počítá uvedené počty možností na šachovnici 41×41 polí (až 20 kroků od kanálu všemi směry). Experimentováním s tímto programem a konzultací s vyučujícím matematiky jsem zjistil, že čísla na okrajích oblasti možného výskytu opilce (má tvar na koso postaveného čtverce) jsou kombinační čísla

$$\binom{k}{0}, \binom{k}{1}, \binom{k}{2}, \dots$$

Čísla uvnitř čtverce jsou pak součiny dvou kombinačních čísel na okraji čtverce. Opilec se zpět nad kanál nemůže vrátit po lichém počtu kroků, pro liché k je tedy pravděpodobnost, že se ocitne zpátky nad kanálem, rovna nule. Pro sudé $k = 2n$ je počet všech možností, jak se dostat zpět nad kanál, roven

$$\binom{2n}{n}\binom{2n}{n} = \binom{2n}{n}^2 .$$

Počet všech možných cest opilce (na libovolné pole šachovnice) je 4^{2k}. Pravděpodobnost toho, že se opilec ocitne po sudém počtu kroků $k = 2n$ zpátky nad kanálem, je rovna podílu těchto dvou čísel:

$$p(2n) = \frac{\binom{2n}{n}^2}{4^{2n}} .$$

Výpočty podle výše uvedeného vzorce jsem také zpracoval formou skriptů. Program počítá tabulky počtů možností a pravděpodobností pro jednotlivé počty kroků. Pro zajímavost uvedu, jak klesá pravděpodobnost návratu zpět nad kanál pro počet kroků 2, 4, 6 a 8:

$$p(2) = 0{,}250\,; \qquad p(4) = 0{,}141\,;$$
$$p(6) = 0{,}098\,; \qquad p(8) = 0{,}075\,.$$

Více vypočtených hodnot naleznete na již dříve uvedených stránkách.

Pozn. red.: Mgr.^MM Eva Černohorská vypracovala vysoce sofistikovanou a místy velmi obtížně pochopitelnou teorii na výpočet obou zadaných úloh.

Opilec v zajetí matematiky

Mgr.^MM Eva Černohorská

Pokud bych vzala vrtulník a vyletěla přímo nad opilce, který právě vylezl z kanálu, sledovala, jaké dělá kroky, a zapisovala si to, dostanu posloupnost kroků, kde si označím P počet kroků doprava, L počet kroků doleva, T počet kroků dopředu a Z počet kroků dozadu. Délka této posloupnosti bude rovna počtu kroků.

Opilec se ocitne nad kanálem právě tehdy, když $P = L = a$ a $T = Z = b$, což odpovídá počtu kroků $k = 2a + 2b = 2(a + b)$. Odtud je vidět, že opilec může spadnout do kanálu jen pro sudý počet kroků. Pokud vezmu určitá a, b, je počet permutací posloupnosti, a tedy i počet možností, jak mohl opilec dělat za sebou kroky,

$$\frac{k!}{P!L!T!Z!} = \frac{k!}{(a!)^2\,(b!)^2}\,.$$

Ovšem konkrétní sudé k můžu vyjádřit jako $2a + 2b$ více způsoby. Pokud a zvolím od 0 do $k/2$, můžu dopočítat $b = k/2 - a$, tedy všech dvojic a, b a jim odpovídajících posloupností a jejich permutací je

$$\sum_{a=0}^{k/2} \frac{k!}{(a!)^2\,((k/2-a)!)^2}\,.$$

Všech možností, jak mohl opilec kráčet, je 4^k (v každém kroku se rozhodoval, jakým ze čtyř směrů se dá). Pravděpodobnost, že po k krocích spadne do kanálu, tedy bude

$$p = \frac{1}{4^k} \sum_{a=0}^{k/2} \frac{k!}{(a!)^2\,((k/2-a)!)^2}\,.$$

A nyní, jak to bude s tím domovem … Nejmenší počet kroků, kterým tam může dojít, je 30. Kratšími cestami se tedy ani nebudu zaobírat. V našem zápisu cesty musí platit, že $L = P$ a zároveň $T = Z + 30$ (domov je 30 kroků přímo před opilcem). Označíme-li si $Z = n$, pak $T = n + 30$ a $P = L = \frac{k-30-2n}{2}$, pak existuje

$$\sum_{n=0}^{(k-30)/2} \frac{k!}{n!(30+n)!\left(\left(\frac{k-30-2n}{2}\right)!\right)^2}$$

možných posloupností a jejich permutací.

Pozn. red.: V následující části řešení udělala Mgr.MM Eva Černohorská chybu. My jej přesto otiskneme v původním znění. Vy tím pádem máte jedinečnou šanci získat bonusové body za nalezení chyby a opravu vzorců!

Když dojde opilec po k krocích domů, už nás další kroky nezajímají (bude chodit po bytě), a tedy je můžeme zvolit 4^{100-k} způsoby. Ale co když se už někdy před k-tým krokem do bytu dostal? Musím odečíst posloupnosti, které mají tyto vlastnosti: v první části opilec dorazil k domu a v té druhé části chodil dokola tak, že nakonec po k krocích skončil opět u dveří. Jak spočítat počet možností, že se opilec dostane ke dveřím, už známe. To, že se potom dostal po čase znovu ke dveřím do domu, je vlastně stejná úloha, jako určení pravděpodobnosti, že opilec spadne do kanálu (vrátí se na místo, odkud vyšel). Pro zvolené k je počet možností, jak se mohl opilec dostat před dům

$$\sum_{n=0}^{(k-30)/2} \frac{k!}{n!(30+n)!\left(\left(\frac{k-30-2n}{2}\right)!\right)^2} - \sum_{\substack{q=2\\ q\,\text{sudé}}}^{k-30} \sum_{i=2}^{q/2} \frac{q!}{(i!)^2\left((q/2-i)!\right)^2},$$

a do stovky kroků potom chodí libovolně. Takže to celé vynásobíme 4^{100-k}. Za k volím sudá čísla od 30 do 100, a tedy možností, že se během sta kroků dostane domů, je

$$\sum_{\substack{k=30\\ k\,\text{sudé}}}^{100} \left(\sum_{n=0}^{(k-30)/2} \frac{k!}{n!(30+n)!\left(\left(\frac{k-30-2n}{2}\right)!\right)^2} - \sum_{\substack{q=2\\ q\,\text{sudé}}}^{k-30} \sum_{i=2}^{q/2} \frac{q!}{(i!)^2\left((q/2-i)!\right)^2} \right) \cdot 4^{100-n}.$$

Pravděpodobnost, že se během 100 kroků dostane domů, získám vydělením celkovým počtem možných posloupností kroků (tj. 4^{100}):

$$p = \sum_{\substack{k=30\\ k\,\text{sudé}}}^{100} \left(\sum_{n=0}^{(k-30)/2} \frac{k!}{n!(30+n)!\left(\left(\frac{k-30-2n}{2}\right)!\right)^2} - \sum_{\substack{q=2\\ q\,\text{sudé}}}^{k-30} \sum_{i=2}^{q/2} \frac{q!}{(i!)^2\left((q/2-i)!\right)^2} \right) \cdot 4^{-n}.$$

Ačkoli se počítání možností návratu nad kanál u obou autorů podstatně liší, oba vzorce dávají tytéž výsledky, což jsem osobně překontroloval pomocí Maplu. V případě pravděpodobnosti nalezení domova vzorec *Mgr.MM Evy Černohorské* dává správnou pravděpodobnost, že opilec narazí na dveře domova během 30 kroků: $1/4^{30} \approx 0{,}9 \cdot 10^{-18}$, pro větší počet kroků se začíná projevovat chyba v odvození.

Ti z vás, kteří se nechcete zaobírat opravováním chyby nebo vymýšlením vzorce pro pravděpodobnost šťastného návratu domů, můžete zjišťovat, jak se mění s počtem kroků poloměr kružnice, uvnitř které se bude opilec nacházet s pravděpodobností $1/2$. Prozradím vám, že odsud je už jen kousek k počítání způsobu šíření zápachu ve vzduchu nebo pohybu zrnka pylu při tzv. Brownově pohybu. Tak ať se vám daří.

Charlie

Řešení úloh

Úloha 2.1 – Rain Man (5b)

Zadání:
Raymond Babbitt z filmu Rain Man (blázen, který byl například schopný okamžitě spočítat 250 párátek ležících na stole) vstoupil do výtahu.

Po tom, co se zavřely dveře a výtah se rozjel, začal počítat: „8, 9, 5, 8, 7, 6, 7, 7, 4, 8, 6, 7, 3, 6, 5, 4, 5, 5, 2“. Co se stalo potom?

Řešení:
Raymondovi Babbittovi sa otvorili dvere na prízemí a vystúpil. Nižšie poschodie výťah už nemal. Čísla, ktoré hovoril, boli počty čiarok na digitálnom displeji znázorňujúcim číslo poschodia.

Úloha chcela, aby ste nad ňou trošku porozmýšľali. Zamysleli sa a vcítili sa do kože Rain Mana. Vžiť sa do úlohy detektíva – riešenie bolo tak prosté, milý Watsone, že išlo zaslať aj ako SMS. :-)

Väčšina z vás prišla na to, že po desiatich číslach sa opakujú rozdiely medzi dvoma po sebe nasledujúcimi číslami, nikto sa však nepozastavil nad tým, prečo je to práve 10 a nie iné číslo.

Veľa z vás písalo o tom, že Rain Man skončil počítanie, keď došiel k nule, resp. prvému zápornému číslu. Nikto však nezdôvodnil prečo.

Bzučo

Úloha 2.2 – Nepozorný řidič (4b)

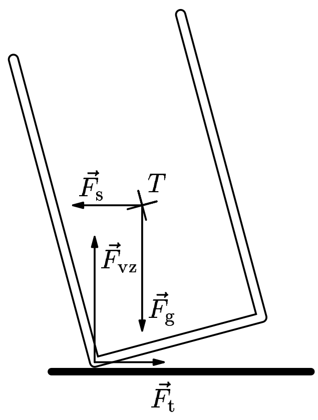
Zadání:
V limuzíně stojí na rovném stolku prázdná sklenička. Sklenička je válcového tvaru, má průměr 8,0 cm *a výšku* 14,5 cm*. Tloušťka stěn je* 2 mm*. Je vyrobena ze skla o hustotě* $2\,700\,\mathrm{kg/m^3}$*.*

Řidič bez varování prudce zabrzdí a sklenička na stolku se převrhne. Co může fyzik sedící v limuzíně na základě této příhody prohlásit o stolku a o skleničce?

Řešení:
Nejprve se zamysleme, co vlastně může zmíněný fyzik zjišťovat. Rozměry skleničky, její hmotnost, polohu těžiště, moment setrvačnosti atd. si během dlouhé a nudné jízdy už určitě spočítal. Teď ale řidič sešlápl brzdový pedál a sklenička se dala do pohybu. Celý experiment byl pozorován ve vztažné soustavě spojené s limuzínou. V této soustavě jej také budeme popisovat, takže ke skutečným

silám je třeba přidat ještě sílu setrvačnou. Sklenička je válcová, proto veškeré působící síly budeme zkoumat v rovině dané osou skleničky a směrem brzdného zrychlení (viz obrázek r2.1).

Konkrétní působící síly jsou následující: tíhová síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}$, setrvačná síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{s}}$, reakce podložky $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ a tření mezi skleničkou a stolkem $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$. K převrácení skleničky samotná setrvačná síla nestačí, protože působí v těžišti, a tudíž nemá žádný otáčivý účinek. Převrácení skleničky způsobila síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$. Budeme tedy předpokládat, že na základě této události lze něco prohlásit o tření mezi skleničkou a stolkem.



Obr. r2.1

Pro přesný rozbor problému je třeba uvažovat síly $\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}$ a $\boldsymbol{F}_{\mathrm{t}}$ jako vazbové[4], a nelze tedy tvrdit, že $|\boldsymbol{F}_{\mathrm{vz}}| = |\boldsymbol{F}_{\mathrm{g}}|$ apod. Zmíněné tvrzení (a další jemu podobná) platí pouze ve statickém případě, kdy se těžiště nepohybuje (nebo pohybuje rovnoměrně přímočaře). V našem případě se ale těžiště pohybuje se zrychlením a získat z pohybových rovnic, které situaci popisují, nějakou podmínku pro součinitel smykového tření není vůbec jednoduché.

Na úlohu se ale dá dívat i jinak. Poměrně jednoduše dokážeme spočítat podmínky pro rovnováhu skleničky. Po přenesení všech sil do těžiště zůstanou dva opačně orientované momenty $M_{\mathrm{vz}} = rF_{\mathrm{vz}}$ a $M_{\mathrm{t}} = h_{\mathrm{t}}F_{\mathrm{t}}$, kde r je poloměr skleničky a h_{t} výška těžiště. Pokud platí $M_{\mathrm{vz}} \geq M_{\mathrm{t}}$, sklenička se zjevně nikam nepřeklápí. V našem případě se ale překlopila, takže musí platit

$$M_{\mathrm{vz}} < M_{\mathrm{t}}\,, \qquad rF_{\mathrm{vz}} < h_{\mathrm{t}}F_{\mathrm{t}}\,. \tag{r2.1}$$

Dále známe vztah mezi velikostí třecí a normálové síly:

$$F_{\mathrm{t}} \leq fF_{\mathrm{vz}}\,. \tag{r2.2}$$

Ze vztahů (r2.1) a (r2.2) plyne:

$$\frac{r}{h_{\mathrm{t}}} < \frac{F_{\mathrm{t}}}{F_{\mathrm{vz}}} \leq f\,. \tag{r2.3}$$

Teď zbývá určit výšku těžiště. Sklenička se skládá ze stěn ve tvaru dutého válce. Tato část má těžiště v geometrickém středu a její objem je

$$V_1 = \pi\left(r^2 - (r-d)^2\right)h = \pi(2rd - d^2)h\,, \tag{r2.4}$$

kde h je výška skleničky a d šířka stěn. Dno má objem

$$V_2 = \pi d(r-d)^2 \tag{r2.5}$$

[4] Tedy snažící se udržet bod, který se dotýká stolu, na stejném místě.

a těžiště opět v geometrickém středu. Pro výšku těžiště h_t pak platí

$$V_1 \left(\frac{h}{2} - h_t \right) = V_2 \left(h_t - \frac{d}{2} \right) ,$$

$$h_t = \frac{V_1 h + V_2 d}{2(V_1 + V_2)} . \qquad \text{(r2.6)}$$

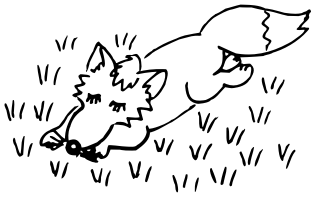
Po dosazení číselných hodnot ze zadání vychází

$$h_t = 6{,}44\,\mathrm{cm} .$$

Dosadíme-li tuto hodnotu do vztahu (r2.3), vychází, že fyzik v limuzíně mohl prohlásit, že součinitel smykového tření mezi stolkem a skleničkou je určitě větší než 0,62.

Pozn.: Při provedení detailního rozboru celého pohybu by asi bylo možné vyvodit i jiné závěry, ale rozhodně nebudou v rozporu s tím, že $f > 0{,}62$. *Při menším* f *se sklenička prostě nemůže překlopit.*

Marble



Úloha 2.3 – Káva versus čaj (3b)

Zadání:

Mějme šálek kávy a šálek čaje. Nabereme jednu lžičku čaje a vylijeme ji do kávy. Potom šálek s kávou zamícháme. Následně vezmeme tu samou lžičku, nabereme směs kávy a trošky čaje a přelijeme ji zpět do čaje.

Zanedbejte případné ztráty tekutin způsobené např. vypařováním, vylitím apod. a určete, jestli se bude nacházet více čaje v kávě nebo naopak.

Řešení:

Nejprve problém vyřešíme tím, že zkusíme vyjadřovat poměry kávy a čaje v šálcích během procesu přelévání. Budeme předpokládat, že oba šálky mají stejný objem.

Abychom mohli problém přehledně popsat, zavedeme si několik označení. Objem jedné lžičky označme a, objem jednoho šálku, pokud z něj ubereme jednu lžičku, označme b – tedy objem celého šálku je $(a + b)$. Kávu budeme označovat písmenkem K, čaj C.

Na začátku, než začneme nápoje míchat, je např. v levém šálku čistá káva a v pravém šálku čistý čaj. V našem značení:

levý šálek: $(b + a)K$, pravý šálek: $(b + a)C$.

Teď nabereme z pravého šálku lžičku čaje a vlijeme ji do levého. Jak po tomto kroku vypadá situace?

levý šálek: $(b+a)K + aC$, pravý šálek: bC.

V pravém šálku máme pořád čistý čaj, ale v levém se nám utvořila směs čaje a kávy, její složení označíme X. Má toto složení:

$$X = \frac{b+a}{b+2a}\,K + \frac{a}{b+2a}\,C\,.$$

V levém šálku teď máme množství $(b+2a)$ látky X.

levý šálek: $(b+2a)X$, pravý šálek: bC.

V dalším kroku nabereme z levého šálku lžičku směsi X a vlijeme ji do pravého šálku.

levý šálek: $(b+a)X$, pravý šálek: $bC + aX$.

Jaké je tedy složení tekutiny v levém šálku?

$$(b+a)\left(\frac{b+a}{b+2a}\,K + \frac{a}{b+2a}\,C\right) = \frac{(b+a)^2}{b+2a}\,K + \frac{a(b+a)}{b+2a}\,C\,.$$

Poměr čaje ku kávě v levém šálku je tedy:

$$\frac{a(b+a)/\,(b+2a)}{(b+a)^2/\,(b+2a)} = \frac{a}{a+b}\,.$$

Teď se podíváme do pravého šálku:

$$bC + aX = bC + a\left(\frac{(b+a)K}{b+2a} + \frac{aC}{b+2a}\right) = \frac{a(b+a)}{b+2a}\,K + \left(b + \frac{a^2}{b+2a}\right)C =$$
$$= \frac{a(b+a)}{b+2a}\,K + \frac{b^2+2ab+a^2}{b+2a}\,C = \frac{a(b+a)}{b+2a}\,K + \frac{(a+b)^2}{b+2a}\,C\,.$$

Poměr kávy ku čaji v pravém šálku je tedy:

$$\frac{a(b+a)/(b+2a)}{(a+b)^2/(b+2a)} = \frac{a(b+a)}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b}\,.$$

Zjistili jsme, že poměr čaje ku kávě v levém šálku je stejný jako poměr kávy ku čaji v pravém šálku. V kávě je tedy stejně čaje, jako je kávy v čaji.

Ke stejnému výsledku můžeme dojít ještě jednodušší úvahou. Opět máme v levém šálku kávu, v pravém čaj. Nebudeme teď sledovat přelévání po jednotlivých krocích, podíváme se pouze na stav na začátku a na konci procesu. Protože z každého šálku jsme jednu lžičku tekutiny ubrali a jednu jsme tam přidali, je jasné, že celkový objem tekutin v levém šálku se nezměnil, stejně tak v pravém. Na konci celého procesu se podíváme třeba do levého šálku. Je tam káva a nějaký objem (označíme V) čaje. Kde se tam vzal ten čaj? Protože žádný čaj nemůže nikde vzniknout ani zaniknout, musí tento objem V čaje nutně pocházet z pravého šálku. Takže v pravém šálku chybí přesně objem V čaje a místo něj je tam káva z levého šálku. Proto je v kávě stejné množství čaje jako v čaji kávy (množství V).

Tento postup lze použít, aniž bychom museli předpokládat, že oba šálky jsou stejně velké. Můžeme mít třeba levý šálek o objemu 3 lžičky a pravý šálek o objemu 50 lžiček. I pak je správné tvrzení, že v čaji je stejně kávy jako kávy v čaji, což je odpověď na otázku zadanou v úloze. (Výrazem „v čaji“ myslím „v šálku, kde byl původně čaj“, podobně pro kávu.) Samozřejmě to pak neznamená, že poměr čaje ku kávě v jednom šálku bude stejný jako poměr kávy ku čaji v druhém.

Poznámka: V řešení úlohy jsme zanedbali ztráty tekutin během procesu. Také jsme předpokládali, že pokud smísíme určitý objem čaje a určitý objem kávy, výsledný objem bude přesně součet původních objemů.

Lenka

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	t3	t4	t5	$\sum_0$	$\sum_1$
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	31		4	1					4	9	31
2.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská	29			3					6	9	29
3.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar	51	4	0	1	8		0		2	15	26
4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	64			3		7				10	25
5.–6.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Olšina	78			2				1		3	23
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Perešíni	23	3	1	3						7	23
7.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dostál	20										20
8.–9.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpánka Mohylová	22			3						3	18
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Luboš Ptáček	18	3		3						6	18
10.–12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Greškovič	15		0	3				3		6	15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Zbyněk Konečný	15		4	3						7	15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Morávek	15	2		3						5	15
13.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Babováková	48										14
14.–15.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Štec	192										13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Gavenčiak	20										13
16.–17.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jindřich Soukup	22		2	3	4					9	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Vetrik	12										12
18.–20.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Stanislav Basovník	75										11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Monika Martinisková	16										11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jiří Borkovec	11	5		1						6	11
21.–23.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Studničná	80										10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Havlik	10										10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ František Konopecký	10	2	5	3						10	10
24.–26.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Vojtěch Kubáň	34	5		1						6	9
	Martin Konečný	9	1	1	3				1		6	9
	Jaroslav Šeděnka	9										9
27.–32.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Demín	242										8
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	34	2		1						3	8
	Tereza Hlaváčová	8	2		3						5	8
	Jiří Milička	8										8
	Marek Scholz	8										8
	Adam Šugl	8										8
33.–36.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ľuboš Uličný	24										7
	Martin Holeček	7										7
	Tomáš Javůrek	7										7
	Zuzana Safernová	7	4		3						7	7

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	t3	t4	t5	$\sum_0$	$\sum_1$
37–40.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Michal Růžek	49										6
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jan Rieger	18										6
	Jana Przeczková	6							3		3	6
	Antonín Špaček	6			3						3	6
41–42.	Dr.$^{\text{MM}}$ Michal Demín	58										5
	Mgr.$^{\text{MM}}$ Helena Kubátová	48										5
43–44.	Pavel Procházka	4										4
	Martin Suchan	4		1	3						4	4
45–47.	Michal Matych	3										3
	Hana Suchomelová	3										3
	Přemysl Šrámek	3										3
48–51.	Bc.$^{\text{MM}}$ Petra Malá	17										2
	Milan Dvořák	2										2
	Jan Šácha	2										2
	Ondřej Tkáč	2	2	0	0						2	2
52–53.	Pavla Grubhofferová	6			0						0	1
	Jiří Krejčí	1										1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.