M&M
Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník X číslo 3

Termín odeslání: 26. 1. 2004

Milí kamarádi,
držíte v rukou nové číslo časopisu M&M, v tomto kalendářním roce poslední.

Do nového roku bychom vám chtěli popřát, abyste byli šťastní, zdraví a spokojení. Abyste měli kolem sebe dobré kamarády, abyste vždycky našli něco, z čeho můžete mít radost.

Sobě přejeme, abyste nám zachovali přízeň, měli pořád hodně dobrých nápadů a chuť potýkat se s úkoly, které pro vás vymýšlíme.

Pozdravy posílá

Redakce M&M a lišáček Riki

Zadání úloh

Úloha 3.1 – Obsah trojúhelníku (4b)

Nechť je ABC libovolný trojúhelník. Zvolme bod P, který leží uvnitř tohoto trojúhelníku, a veďme jím rovnoběžky s přímkami AB, BC a AC. Tyto přímky rozdělí trojúhelník na šest částí. Tři z nich jsou menší trojúhelníky. Určete obsah trojúhelníku ABC, znáte-li obsah každého z menších trojúhelníků.

Úloha 3.2 – Fotograf (5b)

Jakou clonu má nastavit fotograf, který fotí fotoaparátem s objektivem s ohniskovou vzdáleností 35 mm, aby měl na záběru ostré dva zajímavé předměty? Jeden je ve vzdálenosti 2 m a druhý 10 m od fotografa. (Clonové číslo je poměr f/d ohniskové vzdálenosti f a průměru d otvoru [přesněji vstupní pupily] objektivu.)

Použitý film má políčko o rozměrech 36×24 mm, které obsahuje přibližně 15 milionů světlocitlivých zrnek.

Úloha 3.3 – Body na přímce (3b)

Umístěte do roviny 10 bodů tak, aby tvořily 5 řad po 4 bodech. Řada má n bodů tehdy, když existuje přímka, která prochází právě n body.

Řešení témat

Téma 1 – Oko a stroboskopie

Rotující kruhy

Mgr.MM Jan Musílek

Jak se točí kolo na autě

Na fotografii (obr. t1.1) je kolo našeho auta. Vzorek na ozdobné poklici se pravidelně opakuje po třetině kruhu, tj. po úhlu 120°.

Jestliže pohyb kola natočí filmová kamera rychlostí 24 snímků za sekundu a jestliže se kolo za 1/24 s pootočí tak, že opakující se vzorek bude na dalším snímku o trochu zpátky proti předcházejícímu, bude se kolo při promítání filmu zdánlivě točit zpět.

Zkusím upřesnit pojem „trochu zpátky".

Obr. t1.1

Aby byl zpětný pohyb kola dobře viditelný, nebude se točit rychleji než 2 otáčky za 1 s. To odpovídá 1/12 kruhu za 1/24 sekundy, tedy $360°/12 = 30°$. Protože se vzorek opakuje po 120°, musí být úhel pootočení mezi snímky v rozmezí úhlů 90°–120° nebo 210°–240° nebo 330°–360° nebo 450°–480° atd. Teoreticky do nekonečna, ale prakticky jsme omezeni jednak rychlostí auta, jednak tím, že na jednotlivých snímcích filmu se začne projevovat pohybová neostrost a obrázky budou hodně rozmazané.

Změřil jsem průměr pneumatik našeho auta: $d = 0{,}56\,\mathrm{m}$. Odtud dostáváme poloměr $r = 0{,}28\,\mathrm{m}$.

Dále můžu spočítat dráhu $s_{1/24}$, kterou ujede auto mezi dvěma po sobě jdoucími snímky filmu, a dráhu s_1, kterou urazí za 1 s. Ta je číselně rovna rychlosti v m/s a po vynásobení převodním koeficientem 3,6 dostanu rychlost auta v km/h. Výsledky výpočtů jsou uvedeny v tabulce t1.1.

Úhel otočení kola mezi 2 snímky	90°–120°	210°–240°	330°–360°
Dráha auta $s_{1/24}$ mezi 2 snímky [m]	0,44–0,59	1,03–1,17	1,61–1,76
Dráha auta s_1 za 1 s [m]	10,6–14,1	24,6–28,1	38,7–42,2
Rychlost auta [m/s]	10,6–14,1	24,6–28,1	38,7–42,2
Rychlost auta [km/h]	38,0–50,7	88,7–101	139–152

Tabulka t1.1

Z tabulky je vidět, že zdánlivý zpětný pohyb kol nastává pouze v určitých intervalech rychlosti auta (pro naše auto a naše disky je to např. mezi 38,0 km/h a 50,7 km/h). Pokud nedosáhneme spodní mez intervalu, přestane být zpětný pohyb zřetelný; pokud dosáhneme přesně horní mez, pohyb se zdánlivě zastaví, a pokud jen mírně přesáhneme horní mez, bude vidět pomalý pohyb kola ve směru jízdy auta.

Vzorce pro výpočet:

$$s_{1/24} = 2\pi r \cdot \frac{a^\circ}{360^\circ},$$
$$s_1 = 24 \cdot s_{1/24}.$$

Výpočet, který jsem provedl, je samozřejmě jednou z mnoha možností. Ozdobné poklice nebo lité disky kol mají různé tvary. Časté jsou např. pěti-, šesti- či sedmicípé hvězdice. Pro ně by vycházelo víc užších intervalů. Také rozměry pneumatik se mohou lišit. Princip však zůstane stejný jako v uvedeném příkladu.

Na co je fyzikovi dobrý šlehač

K pochopení jevu může dobře posloužit také záznam experimentu, který jsem provedl s rotujícím černobílým diskem, jejž jsem připevnil k metle elektrického ručního šlehače a zachytil pomocí digitálního fotoaparátu Canon A200. Na snímku je díky pomalému zrychlení rotace disku a překročení horní hranice intervalu rychlosti otáčení vidět nejprve zdánlivá zpětná rotace, která zpomaluje, pak se pohyb na okamžik zdánlivě zastaví a nakonec přejde do zdánlivé pomalé rotace vpřed.

Doufal jsem, že při některé rychlosti šlehače (má tři rychlostní stupně) se budou některá mezikruží pohybovat zpět a jiná vpřed.

Bohužel při nejnižší rychlosti tento jev nenastává a při vyšších rychlostech je pohybová neostrost příliš velká a mezikruží splývají do šedého pruhu.

Vhodnější než ruční šlehač by bylo zařízení s možností plynulé regulace otáček.

Pozn. red.: Videozáznam najdete na stránkách M&M, konkrétně na adrese `http://mam.mff.cuni.cz/zajimavosti/stroboskopie/kolo.avi`.

Různobarevné rotující disky na ručním šlehači

Nejprve jsem pokračoval v pokusech s disky rotujícími na ručním šlehači. Menší kruhy, přesněji řečeno mezikruží, jsem rozdělil na šest stejných částí po 60°. Části jsem vybarvil pastelkami a kotouč roztočil na metle šlehače. Plocha mezikruží splynula do jedné barvy, která závisela na obarvení segmentů tak, jak je sepsáno v tabulce t1.2.

Všiml jsem si, že se barvy skládají stejně jako barvy na monitoru počítače, nebo v barevné televizi, protože např. červená a zelená dávají dohromady žlu-

Obarvení segmentů disku	Výsledná barva rotujícího disku
červená–zelená–modrá–červená–zelená—modrá	světle šedá až bílá
červená–zelená–červená–zelená–červená–zelená	žlutá
červená–modrá–červená–modrá–červená–modrá	růžovo-fialová
modrá–zelená–modrá–zelená–modrá–zelená	světlá zeleno-modrá

Tabulka t1.2

tou. Kdyby se barvy skládaly jako na inkoustové tiskárně nebo jako temperové barvy, daly by červená, zelená a modrá dohromady černou.[1]

Vzorkovací frekvence oka pomocí otáčení mezikruží s různým počtem zubů gramofonem

Rychlost otáčení disků byla však pořád moc velká a navíc pro mě neznámá, takže jsem potřeboval najít přístroj, který bude disky otáčet pomaleji a bude mít známou rychlost otáčení. Napadl mě gramofon, který jsem použil při dalším experimentu.

Gramofon se otáčel znatelně pomaleji než ruční šlehač, jeho rychlost otáčení je 33 ot./min nebo 45 ot./min. Z těchto rychlostí mohu spočítat, o jaký úhel se kotouč otočí za sekundu:

$$33\,[\text{ot./min}] = 33/60\,[\text{ot./s}] = 0{,}55\,[\text{ot./s}] = 0{,}55\,[\text{s}^{-1}]\cdot 360\,[^\circ] = 198\,[^\circ/\text{s}]\,,$$

$$45\,[\text{ot./min}] = 45/60\,[\text{ot./s}] = 0{,}75\,[\text{ot./s}] = 0{,}75\,[\text{s}^{-1}]\cdot 360\,[^\circ] = 270\,[^\circ/\text{s}]\,.$$

Připravil jsem si kotouč o poloměru $r = 96$ mm a na něj narýsoval soustředné kružnice o poloměrech 56 mm, 64 mm, 72 mm, 80 mm a 88 mm. Tím vzniklo 5 mezikruží o šíři 8 mm.

Do každého mezikruží jsem narýsoval a vybarvil určitý počet trojúhelníkových zubů, které při pohybu gramofonu vytvoří iluzi pravidelně blikajícího vzoru. Úseky pro zuby jsem rýsoval pomocí úhloměru s výjimkou prostředního mezikruží, kde jsem úhel 11,25° získal postupným dělením pravého úhlu vždy na dvě stejné části – viz tabulka t1.3.

Pozorováním otáčejícího se kotouče jsem zjistil, že pohybem hlavy nebo očí stíhám sledovat otáčení celého disku se všemi mezikružími a všechny zuby vidím ostře a zřetelně při obou rychlostech gramofonu. Proto jsem si pohled na disk zakryl čtvrtkou, ve které jsem vystřihl jen úzký klínovitý průzor. Vrchol klínu jsem umístil nad střed otáčejícího se kotouče, úhel klínu byl asi 20°. Průzorem klínu jsem znovu pozoroval pohybující se zuby mezikruží.

Ve třetím a čtvrtém sloupci tabulky t1.3 jsou uvedeny frekvence střídání zubů v průzoru. Pro frekvence 33,75; 27; 24,75 a 24 s^{-1} zuby zdánlivě splynuly

[1] *Pozn. red.: Farba závisí na intenzitě. Aj v RGB aj v CMY sme schopni namiešat rovnaké farby z fareb pôvodných. Čierna a biela sú rovnaké farby, je to otázka intenzity.*

Úhel na 1 zub	Počet zubů v mezikruží	Počet zubů za 1 sekundu, čili frekvence střídání zubů		Barva zubů
		$\omega = 45$ ot./min	$\omega = 33$ ot./min	
8°	45	33,75	24,75	černá
10°	36	27	19,8	hnědá
11,25°	32	24	17,6	červená
12°	30	22,5	16,5	zelená
15°	24	18	13,2	modrá

Tabulka t1.3 – Parametry otáčejícího se kotouče s barevnými zuby v mezikružích

v souvislý barevný pruh (díky tvaru zubů byl každý pruh na svém vnějším okraji nejsvětlejší a na svém vnitřním okraji nejtmavší). Při frekvenci 13,2; 16,5; 17,6; 18 a 19,8 s^{-1} byly zřetelně vidět jednotlivé zuby.

Pro frekvenci 22,5 s^{-1} byly vidět jednotlivé zuby pouze částečně, a proto ji považuji za mezní.

Závěr: Vzorkovací frekvence mého oka je 22,5 s^{-1}.

Pozn. red.: Pokúste sa zdôvodniť, prečo majú rôzni ľudia rôzne vzorkovacie frekvencie oka. Urobí dakto experiment, podľa ktorého zistí u štatisticky významnej vzorky ľudí ich vzorkovacie frekvencie? Ako závisí táto hodnota na pohlaví, veku, vzdelaní apod.?

Frekvence snímků videozáznamu digitálního fotoaparátu

Během dokumentace předcházejícího experimentu mě napadlo, že bych mohl s pomocí stejného rotujícího disku určit, kolik snímků ukládá při videozáznamu náš digitální fotoaparát Canon A200. Fotoaparát jsem umístil na stativ a pořídil jsem dva patnáctisekundové videozáznamy, pro každou rychlost gramofonu jeden.

Experiment vyšel lépe, než jsem čekal. Nejen, že se některá mezikruží na videu zdánlivě pohybují zpět a jiná vpřed. Hlavní je to, že se jedno z mezikruží zdánlivě zastavilo.

To znamená, že dosáhlo stejné frekvence střídání zubů, jakou používá náš fotoaparát při ukládání jednotlivých snímků videozáznamu.

Výsledky měření a výpočtů jsou zaznamenány v tabulkách t1.4 a t1.5.

Frekvence s^{-1}	Úhel zubu	Zdánlivý pohyb mezikruží za 1 snímek	Zdánlivý pohyb mezikruží za 20 snímků	Doba oběhu	Zdánlivý směr oběhu
33,75	8°	−2,36°	−47,2°	7,6 s	zpět
27	10°	3,64°	72,8°	4,9 s	vpřed
24	11,25°	2,39°	47,8°	7,5 s	vpřed
22,5	12°	1,64°	32,8°	11,0 s	vpřed
18	15°	−1,36°	−27,2°	13,2 s	zpět

Tabulka t1.4 – Videozáznam s gramofonem otáčejícím se rychlostí 45 ot./min

Frekvence s^{-1}	Úhel zubu	Zdánlivý pohyb mezikruží za 1 snímek	za 20 snímků	Doba oběhu	Zdánlivý směr oběhu
24,75	8°	2°	40°	9 s	vpřed
19,8	10°	0°	0°	–	stojí!
17,6	11,25°	−1,25°	−25°	14,4 s	zpět
16,5	12°	−2°	−40°	9 s	zpět
13,2	15°	−5°	−100°	3,6 s	zpět

Tabulka t1.5 – Videozáznam s gramofonem otáčejícím se rychlostí 33 ot./min

Experimentálně jsem určil, že frekvence snímků videozáznamu digitálního fotoaparátu Canon A200 je 19,8 snímku za sekundu. Tento výsledek však může mít chybu měření způsobenou například o něco pomalejším otáčením gramofonu. Domnívám se, že přesná frekvence je 20 snímků za sekundu. Pak by (relativní) chyba měření byla $(20 - 19{,}8)/20 = 0,01 = 1\,\%$.

Závěr: Frekvence snímků videozáznamu našeho fotoaparátu je $20\,\mathrm{s}^{-1}$.

Pozn. red.: Záznam experimentu najdete opět na stránkách M&M na adrese `http://mam.mff.cuni.cz/zajimavosti/stroboskopie/gramo.avi`.

Několik slov

Mgr.^MM Petr Dostál

Jak všichni víme, oko je nedokonalý orgán. Existuje spousta nedokonalostí, které nám vadí, jako je slepá skvrna, šeroslepost, krátkozrakost a podobně. Naproti tomu jsou nedokonalosti, které se dají pozitivně využít. Rychle vnímané obrázky nám splývají v plynulý záznam, protože si oči pamatují obraz snímku, který právě viděly, dokud se neobjeví snímek následující. Této skutečnosti se využívá u monitorů, v kinech atd.

Ad a) – mezní frekvence oka

Pro svoje pozorování jsem použil vrtačku s plynule nastavitelnou rychlostí otáčení. Do vrtačky jsem připevnil brusný kotouč. Kotouč jsem opatřil výstupkem. Počet otáček jsem byl schopen měřit pomocí zařízení z kola. (Výstupek zavadí o mechanismus počítadla z kola a na počítadle otáček přibude o jednu otáčku navíc.)

Pozoroval jsem dírky pro utahovací klíčku. Jsou na sklíčidle celkem tři (sklíčidlo je zařízení pro úchyt vrtáků a jiných vymožeností). Při rychlosti šest otáček (18 dírek) za vteřinu začaly dírky splývat v rýhu. To znamená, že moje oko přestává rozlišovat rozdíly mezi snímky, které se změní během 0,056 s. Z toho vyplývá, že mému oku stačí obnovovací frekvence 18 snímků za sekundu (18 Hz), aby mělo iluzi plynulého pohybu. Při nižší rychlosti jsem byl schopen pozorovat jednotlivé dírky, iluze plynulého pohybu se ztratila.

Velice zajímavé pozorování jsem učinil v metru, kde jsou informace zobrazovány na LED displejích. Písmena se po nich posunují takovou rychlostí, že se vlastně jeví spojitě.

Ad b) – kola u auta

K jevu, že se kola auta zdánlivě točí v protisměru, dochází díky nedokonalosti televizní techniky. Do televize se přenáší 25 obrázků za sekundu (neboli 50 půlobrázků za sekundu).

Pozn. red.: Televízia má obnovovaciu frekvenciu zhruba 25 Hz. *Prečo ju má monitor oveľa vyššiu (minimálna doporučovaná je 60* Hz*)?*

V mé úvaze budu uvažovat auto, které má pětipaprskové neutronové disky kol. Kamera dělá snímek každých 0,04 sekundy. Pokud by se kolo otočilo o $n.72°$ ($72° = 360°/5$) za 0,04 s (n je kladné celé číslo), jevilo by se nám v televizi zdánlivě stojící.

V jakém případě se nám bude zdát, že kola u auta jakoby couvají? Tento jev nastává, když se kolo otočí o $n.72°$ až $(n.72° - 36°)$ za 0,04s (n je kladné celé číslo).

Ad c) – laťkový plot

Zamysleme se nad tím, jak se musíme kolem latěk plotu rychle pohybovat, aby se dostatečně vzdálený objekt za nimi jevil celistvě.

Díky relativnosti pohybu můžeme říci, že se plot pohybuje a my stojíme. Budu vycházet z předpokladu, že oko zachytí snímek každých 0,04 sekundy. Za tento čas se musí plot posunout tak, aby se na místě, kde byla laťka, ukázala štěrbina.

Minimální rychlost při šířce latě 5 cm, aby se dostatečně vzdálený objekt za nimi jevil celistvě, musí být

$$v = \frac{a/2}{0{,}04} = \frac{a}{0{,}08} = \frac{0{,}5}{0{,}8} = 0{,}62\,\mathrm{m/s} = 2{,}25\,\mathrm{km/h}\,,$$

kde a je šířka latě plotu a b šířka mezery plotu.

Rychlost takového pohybu, při kterém se bude objekt za plotem jevit spojitý, závisí na šíři latěk u plotu. Světlost obrazu závisí na velikosti mezer. Čím větší jsou mezery, tím se nám pozorovaný objekt jeví světlejší (neovlivňuje ho hnědý plot).

Minimální rychlost by měla být pro laťku o šířce 5 cm alespoň 2,25 km/h.

Pozn. red.: Redakcia sa domnieva, že autor celý problém príliš zjednodušil a treba vziať do úvahy aj šírku medzery medzi latkami plotu. Pokúsi sa niekto nájsť lepšiu teóriu?

Ad d) – barevné disky

V bodě a) jsem popsal zhotovení zařízení, kde rotoval brusný kotouč. Díky počítadlu otáček jsem byl schopen měřit úhlovou rychlost rotace.

Teď jsem na brusný kotouč připevnil kotouče z kartonu. Pro experiment jsem si zhotovil tři kotouče různých kombinací barev:

1. Černá a bílá – složily se v šedou.
2. Zelená a červená – složily se v žlutou.
3. Červená, zelená a modrá – složily se v (špinavě) bílou.

Dospěl jsem k názoru, že barvy se neskládají, jako když mícháme tempery, ale platí pro ně opačný princip. Na kotouč dopadne světlo o celé spektrální šíři. Absorbuje se celé spektrum kromě barvy na kotouči. Část odraženého světla se dostane do oka, kde ho zachytí tyčinky a čípky.

Konkretně pro případ 2.: Z kotouče se nám odráží zelené a červené světlo. Pokud budeme kotoučem dostatečně rychle točit, bude se střídavě odrážet zelená a červená. Při složení těchto dvou světel se nám bude zdát výsledná barva jako žlutá.

Ad f) – stroboskop

Pro výrobu stroboskopu potřebujeme zdroj světla. LED dioda je ideálním zdrojem světla pro stroboskop, protože se rychle rozzáří a rychle zhasne. K rozsvěcování a zhášení diody se hodí multivibrátor. Ten jsem si zhotovil.

Pro kalibraci rychlosti blikání jsem použil černý karton s jednou bílou tečkou, který jsem připevnil na brusný kotouč vrtačky. Kotouč jsem ozařoval skupinou LED diod. Na vrtačce jsem postupně zvyšoval rychlost, až se zdálo, že tečka stojí.

Tímto způsobem zkalibrovaný přístroj jsem použil k měření rychlosti kola bicyklu. Kolo jsem otočil na řidítka a na černý plášť pneumatiky přilepil bílou tečku. Při sníženém osvětlení jsem začal točit kolem, až se tečka zdánlivě zastavovala na jednom místě. Z toho vyplývá, že úhlová rychlost kola byla stejná jako rychlost brusného kotouče na vrtačce.

Ad h) – doutnající klacek

Klacek jsem musel otočit asi tak čtyřikrát až pětkrát za vteřinu, abych dosáhl spojitého pohybu. Z toho vyplývá, že za tmy (sníženého osvětlení) je k vytvoření iluze celistvého kruhu zapotřebí nižší rychlost než za normálního osvětlení.

Historie televize

Mgr.[MM] *Helena Kubátová*

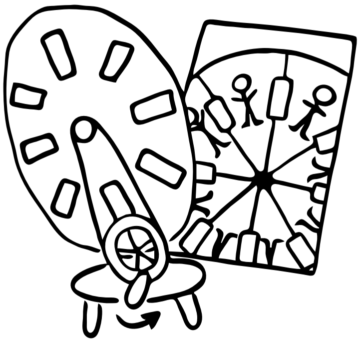
Náš zrak

Zrak je naším nejdůležitějším smyslem – jeho pomocí vnímáme asi 75 % všech podnětů z okolí. Jeho schopnosti jsou sice omezené, ale člověk si s tím již v mnoha případech dokázal poradit a nedokonalosti vlastního zraku také hojně využívá.

Kromě toho, že nedokážeme rozlišit příliš drobné nebo vzdálené objekty, jsme také schopni reálně vnímat jen děje o určité frekvenci. To ovšem není vina oka, ale mozku, který za 1 sekundu zvládne zpracovat jen přibližně 10 různých obrázků. Při větším počtu nám splynou dohromady. Tedy jinak řečeno – nejsme schopni rozlišit děje, které mají frekvenci vyšší než zhruba 10 Hz. Ovšem jsou-li pozorované děje naopak příliš pomalé, nedokážeme je také postřehnout a obraz se nám jeví jako statický. Tak například nemůžeme pouhým okem pozorovat růst rostlin nebo pohyb malé ručičky na hodinách.

Prehistorie televize

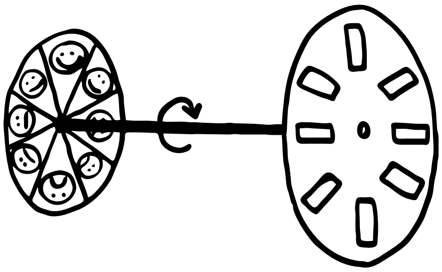
Jak už bylo naznačeno v zadání tohoto tématu, nedokonalosti oka (resp. obecně způsobu vnímání pohyblivého obrazu) se využívá ve filmu. Televize je vedle počítačových monitorů asi nejmodernější optický klam.



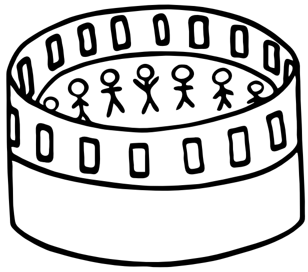
Obr. t1.2 – Fenakistiskop

V černobílých televizích se po obrazovce pohybuje jediný elektronový paprsek, který v 625 řádcích vykreslí celkem 240 000 nepatrných tmavších a světlejších bodů, ze kterých si oko skládá celkový obraz. Takových obrazů se během 1 sekundy vystřídá 25 (tak tomu aspoň bývá ve většině filmů), to znamená, že oko za tuto dobu vlastně vidí dohromady 6 milionů bodů, z nichž si díky své vlastní nedokonalosti dokáže poskládat pohyblivý obraz.

Než však lidstvo dospělo k tomuto „zázraku“ :-), prošel vývoj filmu dlouhou a zajímavou cestou. Na začátku byla tzv. *laterna magika*, kde se nejdřív na stěnu promítaly jen zvětšené nepohyblivé kreslené obrázky. Ty se o něco málo později rozhýbaly tak, že se postavičky všelijakých duchů a čertů promítaly na hustý bílý kouř, v němž se zdánlivě všelijak kroutily a vlnily. Okruh témat pro tento způsob projekce byl však poněkud úzký, a tak tyto pokusy zanedlouho skončily.



Obr. t1.3 – Forolyt



Obr. t1.4 – Kouzelný buben

V 19. století se objevila celá řada různých pohybových hraček. V roce 1832 to byl *fenakistiskop* (obr. t1.2) – papírový kotouč, z jedné strany černý a z druhé dokola pokreslený obrázky rozfázovaného pohybu (např. jezdce jedoucího na koni). Mezi jednotlivými obrázky byly štěrbiny. Kotouč se upevnil na osu a otáčel se obrázky proti zrcadlu. Pokud se točil dostatečně rychle, spojily se jednotlivé obrázky při pozorování skrz horní štěrbinu (tj. tu, která byla v daném okamžiku nahoře) v plynulý pohyb. Jinou formou této hračky byl *pohybohled* neboli *forolyt* (obr. t1.3) Jana Evangelisty Purkyně. Na hřídeli byly proti sobě nasazeny dva kotouče – jeden se štěrbinami a druhý s obrázky. Když se celé zařízení roztočilo a oko se dívalo do štěrbiny, která byla právě nahoře, vznikl dojem pohybu. Podobně fungoval i *kouzelný buben* (obr. t1.4) – širší papírový pás svinutý do válce, v jehož horní části byly kolem dokola svislé štěrbiny a pod nimi na vnitřní straně rozkreslený periodický pohyb. Válec (tedy abychom byli matematicky přesní *plášť válce*) se dal nasadit například na kotouč gramofonu a při pozorování z jednoho místa jsme mohli opět vidět pohyb.

Poznámka: Oblíbenou a jistě velmi známou hračkou je i tato: na rohy několika po sobě jdoucích stránek tlusté knihy se nakreslí jednotlivé fáze jednoduchého pohybu. Stránky se pak palcem pouštějí rychle za sebou a vznikne tak dojem pohybu (někdy poněkud trhaného – podle naší výtvarné zdatnosti :-)).

A pak přišel biograf

Inspirován těmito hračkami vytvořil Francouz Reynaud v roce 1892 *světelné divadlo*. Do papírového pásu nadělal výřezy a do nich vlepil barevné obrázky nakreslené na průhledný celuloid. V pásu byly ještě otvůrky, do nichž zapadaly kolíčky posunovacího zařízení - podobně jako je to dnes u filmu ve fotoaparátu. Obrázky se jeden po druhém prosvěcovaly a odrážely se od zrcadla na plátno, na kterém byl na principu již zmíněné laterny magiky vytvořen obraz krajiny, kde se scénka odehrávala. Dalo by se tedy říct, že se jednalo o počátek kresleného filmu.

Lidé však toužili po věrnějším obrazu skutečnosti, a ten jim mohla poskytnout jedině fotografie. Její samotnou historii ponechme stranou a podívejme se rovnou na to, jak se ji lidé snažili využít pro film, nebo spíš pro své pohybové hračky. Tak například Američan Muybridge fotografoval klus koně tak, že kůň nohama postupně přetrhával provázky napnuté těsně nad zemí. Každý provázek byl spojen s jedním fotografickým přístrojem a ve chvíli, kdy se přetrhl, přístroj koně vyfotografoval. Vznikl tak sled obrázků, které promítnuty některým z výše popsaných způsobů rychle za sebou skutečně celkem věrně zobrazily běžícího koně.

Uběhla tedy dlouhá doba a bylo vyzkoušeno mnoho nápadů a učiněno pokusů do chvíle, kdy bratři Lumiérové v roce 1895 v Paříži předvedli divákům první skutečný film, aspoň v principu podobný těm dnešním.

My chceme slevu!

Jak už bylo naznačeno na začátku, při promítání filmu se jedná vlastně o to, že každou sekundu nám proběhne před očima přibližně 25 nehybných obrázků. Ovšem v okamžiku, kdy se film v promítacím přístroji posunuje, nevidíme nic.

Trvá-li promítání 1 hodinu, je z této doby na plátně více než 15 minut tma! Naše oči si jí však nestačí všimnout, protože si pamatují předchozí obrázek a než by stačily tmu zaregistrovat, už se dívají na další. (Napadá mě jen, jestli by se nedala na základě těchto faktů uplatňovat v kině 25 % sleva ... :-))

Literatura:

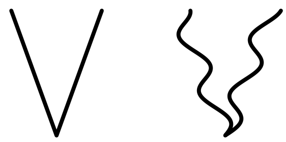
Koval, Václav: Svět našimi smysly. SNDK, Praha, 1963

Experiment s televíziou

Bc.MM Igor Perešíni

Keď som bol malý, rád som sa hral so všelijakými vecami. Obzvlášť som obľuboval veci, ktoré vedeli rezonovať. A tiež som mal veľmi rád pinzety.

Na tom nie je nič nezvyčajné. Nezvyčajnú vec som objavil vtedy, keď som sa pozeral na televízor a hral sa s pinzetou. Keď som pustil pinzetu, a pozoroval cez ňu televízor, začala sa čudne správať – začala sa ohýbať (viď obr. t1.5). Vtedy som však ešte nevedel, prečo.



Obr. t1.5

Samozrejme, dnes už viem. Vieme, že televízor má obnovovaciu frekvenciu asi 50 Hz. Ako si naša pinzeta kmitá, televízor stále zobrazuje riadky za sebou a ak zobrazí 1 riadok, tak kým zobrazí druhý, prejde nejaký čas. Za tento čas sa pinzeta stihne trocha pohnúť. Znovu zobrazí pinzetu (resp. my uvidíme, kde sa nenachádza) a ide na ďalší riadok. A práve to, že sa medzitým pinzeta trochu pohla, spôsobí jej „ohýbanie“.

Môže sa jedno koleso točiť dopredu a druhé dozadu?

kolektív autorů

Jana Przeczková sa domnieva, že za normálnych podmienok[2] sa budú vždy obe kolesá točiť rovnakým smerom.

Mgr.MM Petr Dostál dopĺňuje svoje riešenia a píše:

Zamysleme se, v jakém případě by se nám mohlo zdát, že se jedno kolo točí na opačnou stranu nežli druhé. Velice pěkná situace může nastat například na sněhu, když se přední (poháněná) kola protáčejí. Tím je jejich úhlová rychlost větší nežli úhlová rychlost zadních kol.

Pokud se přední snímané kolo otáčí o $n \cdot 72^\circ$ až $(n \cdot 72^\circ + 36^\circ)$ za 0,04 s a zadní kolo o $n \cdot 72^\circ$ až $(n \cdot 72^\circ - 36^\circ)$ za 0,04 s nebo naopak, zdá se nám, že se točí každé na jinou stranu.

[2] Čo sú to tie normálne podmienky?

Bc.MM Peter Perešíni: Jedno koleso sa môže točiť opačne ako druhé napríklad v prípade, že jedno koleso je menšie o pár milimetrov a auto ide vysokou rýchlosťou, kedy sa jedno koleso točí rýchlejšie ako druhé.

Bc.MM Miroslav Vetrík doporučuje, aby sme použili šmyk na mokrej vozovke alebo na šotoline.

Bc.MM Štěpánka Mohylová si myslí, že ak použijeme rôzne vzory kolies, efekt budeme môcť pri vhodnej konštelácii hviezd pozorovať.

Pozn. red.: Na záver by som chcel pochváliť všetkých, ktorí riešenia dočítali až sem. Skúsim malý experiment. Kto sa mi ozve ako prvý, dostane čokoládu. :-)

Bzučo

Téma 2 – n-rozměrné prostory

Prišlo nám niekoľko zaujímavých riešení, v ktorých ste opisovali n-rozmerné telesá. Najviac ste sa venovali n-rozmerným kockám, ale prišli aj reakcie na Platónske telesá, a kolegyňa Mgr.MM Eva Černohorská nám dokonca poslala návrh na riešenie 4D piškvoriek. Ale už k spomínaným riešeniam n-dimenzionálnych kociek, prišli dve podrobnejšie riešenia od Dr.MM Stanislava Basovníka a Dr.MM Terezy Klimošovej, citujeme riešenie Terezy pretože je prehľadnejší.

Hrany hyperkrychlí

Dr.MM Tereza Klimošová

Protože představit si čtyři a více rozměrů není žádná legrace, v rámci zachování svého duševního zdraví jsem se rozhodla řešit problém extrapolací z nižších dimenzí. Otázka číslo jedna v tom případě je, jak převedeme n-D prostor na prostor dimenze $(n+1)$.

Je celkem zřejmé, že při přechodu do vyšší dimenze vždy přibude jedna osa kolmá na všechny stávající. Např. z přímky (1-D) „vznikne“ rovina (2-D) tak, že k ní přidáme kolmici (vlastně by stačila libovolná různoběžka). Co toto rozšiřování znamená pro krychle?

Nejprve jejich stručný přehled:

Dimenze	1	2	3	4	n
Název	Úsečka	Čtverec	Krychle	Teserakt	n-D krychle
# 0D	2	4	8	16	2^n
# 1D	1	4	12	32	$2^n \frac{n}{2}$
# 2D	0	1	6	24	$2^n \frac{n}{2} \frac{n-1}{4}$
# 3D	0	0	1	8	$2^n \frac{n}{2} \frac{n-1}{4} \frac{n-2}{6}$
# 4D	0	0	0	1	$2^n \frac{n}{2} \frac{n-1}{4} \frac{n-2}{6} \frac{n-3}{8}$

Pozn. red.: Táto tabuľka obsahuje počet 0 až 4 rozmerných kociek, ktoré sú v n-dimenzionálnej kocke. Toto však nie je úplne presné a čitateľ môže namietať: veď v trojrozmernej kocke je nekonečne mnoho bodov a úsečiek, nielen 8 alebo 12! Správna definícia toho, čo intuitívne chápeme ako vrcholy, hrany a steny je taká, že sú to nielen kocky rôznych dimenzií, ale naviac sú to extremálne množiny vo väčšej kocke. Pre náročnejších: množina $A \subseteq B$ sa nazýva extremálna v množine B, ak pre každé $x \in A$ platí, že každá úsečka z B se stredom x, leží celá v A. Vyššie uvedená tabuľka teda udáva počet k-rozmerných extremálnych kociek v n-rozmernej kocke s rovnakou hranou pre $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Poznamenajme tiež že 0 rozmerná kocka je bod.

O prvních třech sloupcích tabulky asi nikdo pochybovat nebude. Další dva jsem odvodila z následujícího: krychli n-D na $(n+1)$-D „rozšíříme“ tak, že

1) Všechny útvary, ze kterých je složena (vrcholy, hrany, …), „rozšíříme“ o jednu dimenzi. Z vrcholů (0D) se stanou 1D hrany, z 1D hran 2D plochy atd. To ale evidentně nestačí, protože by nám mizely útvary nižších dimenzí.
2) Při každém rozšíření do dimenze $(n+1)$ přidáme k původním rozšířeným útvarům z kroku 1) ještě dvě n-D krychle, jakožto stěny[3], se všemi útvary nižších dimenzí.

Z tohoto rozšiřovacího mechanismu lze vyvodit

a) kolik $(n-1)$-D stěn bude mít n-D krychle,
b) kolik vrcholů bude mít n-D krychle.

ad a) Máme-li v n-D krychli X stěn dimenze $(n-1)$, podle uvedeného mechanismu budeme mít v $(n+1)$-D krychli $(X+2)$ stěn n-té dimenze. Protože 1D krychle, čili úsečka, má 2 stěny dimenze 0, čtverec bude mít $2+2$ stěny dimenze 1 atd. Z toho je celkem zřejmé, že obecná krychle bude mít $2n$ stěn dimenze $(n-1)$.

ad b) Protože prvním krokem rozšiřovacího mechanismu zrušíme všechny 0D útvary, stačí spočítat ty, které přibudou v kroku 2. Při přechodu z n-D do $(n+1)$-D přibudou dvě stěny n-té dimenze, čili stejné, jako má původní krychle. Tedy $(n+1)$-D krychle bude mít dvojnásobný počet vrcholů. Víme, že 1D krychle má 2 vrcholy, čili 2D krychle bude mít 2×2 vrcholů, 3D krychle $2 \times 2 \times 2$ vrcholů a n-D krychle tedy bude mít 2^n vrcholů.

Z počtu vrcholů dále můžeme odvodit také počet hran libovolné dimenze. Hrana k-té dimenze je totiž k-D krychle, u které můžeme určit počet stěn dimenze $(k-1)$ a počet jiných k-D hran, se kterými tyto $(k-1)$-D stěny sdílí.

[3] *Pozn. red.: Steny dimenze $(n-1)$ sa niekedy nazývajú nadsteny.*

Začneme obyčejnou 3D krychlí: víme, že má $2^3 = 8$ vrcholů a každý z těchto vrcholů je společný třem 1D hranám. Víme také, že 1D krychle má $2^1 = 2$ vrcholy. Čili počet 1D hran v 3D krychli vypočítáme jako $3 \cdot (2^3/2^1) = 12$. (V n-D krychli by to bylo $n \cdot (2^n/2)$).

Z toho můžeme dále spočítat 2-D stěny. Každá má čtyři 1D hrany a jedna hrana je společná dvěma 2D stěnám, čili počet 2D stěn bude $12 \cdot (2/4) = 6$, což souhlasí s dříve odvozeným vztahem $2n$ pro počet $(n-1)$-D stěn n-D krychle.

Pro teserakt bude situace obdobná, pouze z vrcholu (0D) nebudou vycházet tři, ale čtyři 1D hrany, protože jsme přidali při přechodu do 4-D prostoru jednu osu, v 1-D hraně se ze stejného důvodu budou dotýkat tři 2-D hrany (vyplývá to také z prvního kroku „rozšiřovacího“ mechanismu) atd. Obecně v n-D bude hrana dimenze $(k-1)$ společná $(n-k)$ hranám k-té dimenze.

Počty hran n-D krychle tedy budou následující: 1D hran bude $2^n \cdot n/2$, 2D hran bude $2^n\,(n/2)(n-1)/(2 \cdot 2)$, dále viz přehled krychlí.

Pro k-rozměrné hrany n-rozměrné krychle pak dostaneme počet

$$2^n\,\frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot (n-3) \cdot \ldots \cdot (n-k)}{2^k \cdot 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \ldots \cdot k} = 2^{n-k}\frac{n!}{k!(n-k)!} = 2^{n-k}\binom{n}{k}.$$

Pozn. red.: Na tento vzťah sa dá prísť aj nasledujúcou úvahou: vrcholov je 2^n*, v jednom vrchole sa stretáva* $\binom{n}{k}$ *k-rozmerných stien, pretože v jednom pevnom vrchole si môžme zvoliť k osí z n, medzi ktoré „natiahneme“ k-rozmernú stenu a každá takáto stena je spoločná práve* 2^k *vrcholom. Preto počet stien je* $2^{n-k}\binom{n}{k}$.

Prišli aj úvahy o hyperguli vpísanej a opísanej n-D kocke. Polomer vpísanej hypergule je $a/2$, kde a je dĺžka 1D hrany a polomer opísanej gule je polovica telesovej uhlopriečky, t.j. $a \cdot \sqrt{n}/2$. Riešenia vzájomných polôh rovín a 3D priestorov boli zatiaľ iba jemne spomenuté, a preto túto otázku nechávame otvorenú.

Ďalšie námety na premýšľanie (samozrejme, čokoľvek iné, čo vás napadne, je vítané):

- Podobne ako v 3D priestore existujú zakrivené dvojrozmerné plochy, v priestoroch vyšších dimenzií sú ľahko realizovateľné zakrivené trojrozmerné priestory. Je možné, že aj fyzikálny priestor okolo nás je krivý. Sme schopní to zistiť? Navrhnite čo najviac experimentov, ktoré potvrdia alebo vyvrátia, že žijeme na povrchu štvorrozmernej hypergule. Vedeli by ste navrhnúť experiment, ktorý rozhodne, či žijeme na povrchu štvorrozmerného hypervalca? Ako by sa prejavilo, keby sme žili na povrchu elipsoidu?
- Nájdite analógiu platónskych telies. Ako vypadajú vo viacrozmerných priestoroch futbalové lopty?

- Nájdite obdobu základných fyzikálnych zákonov vo viacrozmerných priestoroch. Mohli by planéty krúžiť okolo hviezd? Boli by dráhy planét stabilné? Ako by mohli obyvatelia hypotetických vesmírov riešiť dopravné problémy a zápchy vo veľkých mestách? Bola by viacrozmernosť výhodou pri stavbách hyperdiaľníc? Mohli by jazdiť všade bez semaforov?
- Keď vylejeme pohár oleja do vody, roztečie sa natoľko, že vznikne jednoatómová vrstva. Takým spôsobom sa dajú rádovo zmerať rozmery atómov. Na aký objem sa roztečie pohár štvorrozmerného oleja, keď ho vylejeme na povrch štvorrozmerného mora?
- Nakreslite priemety rôznych geometrických telies do dvojrozmerného priestoru. Začnite s kockami rôznych dimenzií, môžete použiť počítač. Ako sa telesá premietajú do roviny? Pekné animácie budú odmenené vysokým počtom bodov. Zaujímavé animácie štvorrozmerných objektov sa dajú vytvoriť posúvaním (2-D priemetov) trojrozmerných rezov v čase (čas je štvrtý rozmer).
- Skúste popísať, čo by videl a „zažíval“ trojrozmerný pozorovateľ, ktorý sa bude prechádzať (vznášať sa) stenami štvorrozmerného telesa.
- Iste poznáte (alebo ľahko zistíte) známe vzorce pre výpočet objemu a povrchu n rozmernej gule. Aký je medzi nimi vzťah a prečo? Čím si vysvetlíte, že sa objem a povrch jednotkovej gule vo veľkých dimenziách blížia k nule?
- Ako ľudia v týchto svetoch hrávajú spoločenské hry? Existujú rozumné šachy vo viac dimenziách? Nájdite optimálnu stratégiu. :-)

Jozef & Peťo

Téma 3 – Výstavba sítí

K tomuto tématu nám přišlo několik příspěvků, které se zabývaly jak řešením konkrétního problému sítě na jihu Slovenska, tak pravidly, která by měla platit pro některé typy sítí.

Nejprve dáme prostor tiskovému mluvčímu firmy *Superfast Internet Slovakia*, aby nám sdělil, jak dopadlo výběrové řízení.

Projekt sítě na jihu Slovenska

Do konkurzu přišlo celkem osm návrhů. Všechny jsou shrnuty v tabulce t3.1. Jako jednoznačně nejlepší byl vyhodnocen projekt *Zbyňka Konečného*, který navrhl síť o celkové délce 147,7 jednotek.[4] Navíc (za pomoci počítače) dostatečně přesně určil souřadnice použitých rozbočovačů. Návrhy dalších autorů měly kromě větší celkové délky v některých případech i formální nedostatky. Zejména nám vadilo, když autor neuvedl celkovou délku sítě a její výpočet museli provádět naši zaměstnanci. Taktéž informace o umístění rozbočovačů byla občas velmi neurčitá.

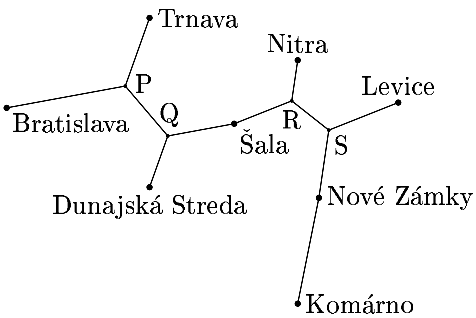
[4] *Pozn. red.: Přestože to tak možná vypadalo, souřadnice měst nebyly zadány v kilometrech.*

Autor	Celková délka
Zbyněk Konečný	147,7
Bc.MM Štěpánka Mohylová	152,9
Mgr.MM Jozef Cmar	153,0
Přemysl Šrámek	153,1
Dr.MM Lenka Studničná	153,4
Martin Konečný	156,0
Prof.MM Martin Demín	159,9
Mgr.MM Jana Babováková	166,1

Tabulka t3.1 – Výsledky konkurzu

Ohodnocení projektů z odborného hlediska přenechala firma *Superfast Internet Slovakia* redaktorům časopisu M&M.

K řešení *Zbyňka Konečného* není co dodat. Zvolil velmi dobrou topologii[5] sítě a v rámci této topologie nalezl optimální pozice rozbočovačů. Jeho řešení je uvedeno na obrázku t3.1.



Obr. t3.1

Většina dalších autorů nedokázala v rámci zvolené topologie optimálně umístit rozbočovače (tzn. jejich řešení lze zlepšit pouhým posunutím uzlů bez „přepojování kabelů"). Jedinou výjimkou je řešení *Dr.MM Lenky Studničné*, která na základě svých úvah o optimální síti spojující tři body, zvolila takovou topologii, kde jsou ke každému rozbočovači připojena právě tři města a poloha rozbočovače je vůči nim optimální. I když toto řešení vypadá na první pohled velmi dobře, vliv vhodné topologie je překvapivě velký, takže Lenčino řešení skončilo až na pátém místě.

Bc.MM Štěpánka Mohylová zvolila stejnou topologii, jakou má vítězný projekt, ale umístila rozbočovače tak, že se v nich kabely sbíhají pod pravými úhly. Mnoho autorů předkládalo, že tento způsob výstavby sítě je optimální a zdůvodňovali to faktem, že nejkratší spojnicí bodu a přímky je právě kolmice. To ale neřeší náš problém, kdy můžeme navrhovanou přímku (úsečku) zalomit a získat tak celkově kratší řešení (podrobněji o tomto problému pojednává následující článek).

Ostatní autoři založili své projekty také na principu kolmého napojování kabelů a navíc zvolili více či méně horší topologii než *Zbyněk Konečný*.

[5] *Pozn. red.: Tedy způsob, jakým jsou navzájem propojena města a rozbočovače bez ohledu na přesnou polohu jednotlivých objektů.*

Ukazuje se, že i když je optimalizace poloh rozbočovačů důležitá a může znatelně snížit celkovou délku sítě, je také velmi důležité zvolit vhodnou topologii. K optimalizaci poloh nám přišlo několik příspěvků, ale nad vhodnou topologií obecného problému se nikdo příliš nezamýšlel.

Dále dáváme prostor *Mgr.*^{MM} *Evě Černohorské*, která nám poslala velmi pěkné řešení problému tří bodů.

Síť pro 3 body

Mgr.^{MM} *Eva Černohorská*

Máme dány 3 body A, B a C. Tyto buďto leží na jedné přímce, anebo tvoří trojúhelník.

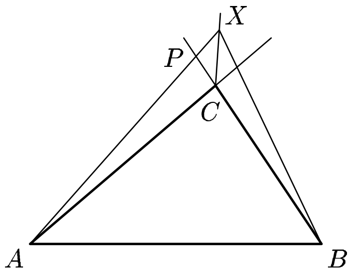
1) Body A, B a C leží na jedné přímce.

   Nejkratší spojnice dvou bodů je přímka. Pokud budeme chtít spojit dva nejvzdálenější body, bude nejkratší spojnice procházet třetím bodem, a je to tedy nejlepší řešení. Minimální délka sítě je v tomto případě rovna vzdálenosti dvou nejvzdálenějších bodů.

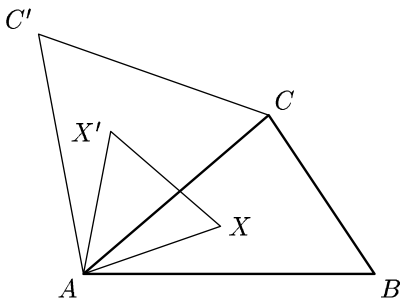
2) Body A, B a C neleží na jedné přímce, a tvoří tedy $\triangle ABC$.

   Budeme hledat bod X, pro který je součet $|AX|+|BX|+|CX|$ nejmenší možný. Tento bod určitě nebude ležet mimo trojúhelník ABC.

   Pozn. red.: Toto tvrzení se zdá zřejmé, ale i tak je třeba se nad korektním důkazem trochu zamyslet. Autorka se v něm dopustila drobné chyby, proto uvádíme opravenou verzi: Pokud úsečka AX (resp. BX, resp. CX) protíná stranu BC (resp. AC, resp. AB), je možné bod X posunout právě do tohoto průsečíku. Je zjevné, že se celková vzdálenost zmenší. V ostatních případech posuneme bod X do vrcholu trojúhelníku. Z trojúhelníkové nerovnosti plyne $|PB| < |PX| + |XB|$ a $|AC| < |AP| + |PC|$ (viz obr. t3.2). Z toho tedy plyne: $|AX|+|XB| = |AP|+|PX|+|XB| > |AP|+|PB| = |AP|+|PC|+ + |PB| > |AC| + |CB|$. Tím je dokázáno, že se zmenší celková délka dvou hran. Třetí hrana se také zmenší ($|XC| > |CC|$:-)). Bod X tedy nemůže ležet mimo trojúhelník ABC.



Obr. t3.2



Obr. t3.3

Nyní provedu otočení bodů C a X kolem bodu A o úhel $60°$ (viz obr. t3.3). Bod C se zobrazí na C' a bod X na X'. Dále platí $|CX| = |C'X'|$ a $|AX| = |A'X'|$. Protože $\triangle AXX'$ je rovnoramenný a u hlavního vrcholu má úhel $60°$, je také rovnostranný. Tedy $|AX| = |XX'|$. Máme tedy najít nejmenší délku $|AX| + |BX| + |CX| = |C'X'| + |X'X| + |BX|$. Minimalizujeme tedy délku lomené čáry $C'X'XB$. Nejkratší lomená čára je úsečka, tedy body X' a X musí ležet na úsečce $C'B$.[6]

Protože body C', X', X a B leží na přímce a $|\sphericalangle AXX'| = 60°$, bude platit $|\sphericalangle AXB| = 120°$. I $|\sphericalangle AX'X|$ je $60°$, takže $|\sphericalangle AX'C'| = |\sphericalangle AXC| = 120°$. Velikost úhlu CXB je pak také $120°$.

Nyní už je jasná konstrukce bodu X. Sestrojíme oblouky, ze kterých je strana BC vidět pod úhlem $120°$. Stejnou konstrukci provedeme nad stranou AB. Tam, kde se tyto oblouky protnou, bude bod X. Oblouky se ale uvnitř $\triangle ABC$ neprotnou, pokud je velikost některého úhlu trojúhelníku větší nebo rovna $120°$.[7] V tomto případě bod X splyne s vrcholem, u kterého je úhel větší nebo roven $120°$, protože je to největší úhel a protější strana bude tudíž nejdelší.

Pokud bychom použili ještě druhý rozbočovač, celková délka se už nezmenší, protože ve všech $\triangle AXB$, $\triangle BXC$ i $\triangle CXA$ je jeden úhel $120°$ a přidáním rozbočovače do vnitřku každého z nich by se celková délka zvětšila podle výše dokázaného.

Pozn. red.: Autorka se dále pokoušela odvodit, jak vypadá optimální síť pro obecně rozložené čtyři body, ale v jejím řešení jsou určité nepřesnosti, takže tento problém ponecháváme nadále otevřený a těšíme se na vaše další příspěvky.

Optimální síť pro pravoúhlý čtyřúhelník

Jaroslav Šeděnka

BÚNO[8] budeme předpokládat, že pro délky stran obdélníku platí $a \leq b$.

Pokud nebudu vytvářet žádné uzly (rozbočovače), nejmenší dosažitelná délka bude $2a + b$.

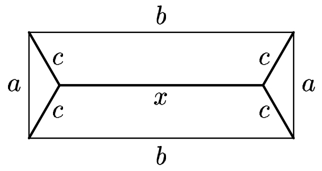
Pozn. red.: Dále se autor zabývá řešením, které využívá dva rozbočovače. Je jasné, že použití více rozbočovačů nemá smysl (není na ně co připojit) a naopak řešení s jedním rozbočovačem je pouze degenerovaným případem.

---

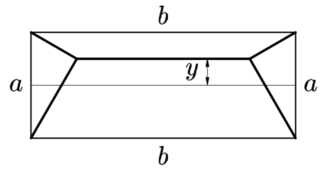
[6] *Pozn. red.: Tato konstrukce selže v případě, že velikost některého úhlu $\triangle ABC$ bude větší než $120°$. V tomto případě neexistuje takový bod X ležící na úsečce $C'B$, aby na této úsečce ležel i jeho obraz X'.*

[7] *Pozn. red.: Viz předchozí poznámku pod čarou.*

[8] *Pozn. red.: Bez újmy na obecnosti (standardní zkratka v matematických textech).*



Obr. t3.4



Obr. t3.5

Budu předpokládat, že nejkratší síť získáme pro rozbočovače umístěné symetricky přesně uprostřed mezi delšími stranami obdélníku (viz obr. t3.4). Její celková délka L je

$$L = x + 4c\,,$$
$$L = x + 4 \cdot \sqrt{\left(\frac{b-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2}\,,$$
$$L = x + 2 \cdot \sqrt{(b-x)^2 + a^2}\,.$$

Pokud rozbočovače neleží přesně uprostřed mezi stranami, označím jeho kolmou vzdálenost od středu y (viz obr. t3.5). Pro celkovou délku sítě L_1 pak platí

$$L_1 = x + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{b-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - y\right)^2} + 2 \cdot \sqrt{\left(\frac{b-x}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2}\,.$$

Tato délka je větší než L, protože pro každé $y > 0$ platí

$$\left(\frac{a}{2} - y\right)^2 + \left(\frac{a}{2} + y\right)^2 > 2\left(\frac{a}{2}\right)^2\,.$$

Pozn. red.: Řadu úprav odůvodňujících posledně zmíněnou implikaci si laskavý čtenář provede sám.

Budu tedy hledat takovou hodnotu x, která minimalizuje délku L. Derivací podle x zjistíme extrém (minimum[9]) funkce s parametry a, b:

$$\frac{\mathrm{d}L}{\mathrm{d}x} = 1 + \frac{2x - 2b}{\sqrt{(b-x)^2 + a^2}}\,;$$
$$1 + \frac{2x_{\mathrm{min}} - 2b}{\sqrt{(b-x_{\mathrm{min}})^2 + a^2}} = 0\,,$$
$$-\sqrt{(b-x_{\mathrm{min}})^2 + a^2} = 2x_{\mathrm{min}} - 2b\,,$$
$$3x^2 - 6bx + 3b^2 - a^2 = 0\,.$$

[9] *Pozn. red.: To, že jde právě o minimum, ovšem autor nedokazuje. Nulová první derivace je v minimu, maximu i v inflexních bodech. K určení, že jde o minimum, je třeba spočítat ještě druhou (resp. první nenulovou) derivaci.*

Kořeny této rovnice jsou $x_{1,2} = b \pm a/\sqrt{3}$. Nemenší délka sítě L je tedy pro $x = b - a/\sqrt{3}$ (toto řešení jsem ověřil zkouškou, neboť prováděné úpravy nebyly ekvivalentní).

Minimální délka sítě pak je

$$L_{\min} = b - \frac{a}{\sqrt{3}} + 2 \cdot \sqrt{\left(b - b + \frac{a}{\sqrt{3}}\right)^2 + a^2}\,,$$
$$L_{\min} = b - \frac{a}{\sqrt{3}} + 4\,\frac{a}{\sqrt{3}}\,,$$
$$L_{\min} = b + \sqrt{3}a\,.$$

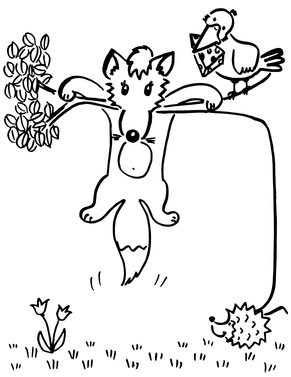
Pozn. red.: Tímto postupem ale ještě není dokázáno, že optimální řešení nemá rozbočovače umístěné jinak, než symetricky a na přímce rovnoběžné s delší stranou.

Pro zajímavost ještě uvádíme graf (obr. t3.6), jak se bude měnit délka sítě v obdélníku v závislosti na poloze rozbočovače. Vzhledem k tomu, že síť s dvěma rozbočovači má čtyři stupně volnosti a dvě různé rozumné topologie, nemůže dvourozměrný graf pokrýt všechny eventuality. V tomto obrázku předpokládáme, že rozbočovače jsou umístěny symetricky vůči středu a ze dvou topologií vybíráme tu kratší. Na obrázku jsou dobře vidět dvě lokální minima, která se mohou objevit, a také ukazuje, jak vypadají (často navrhovaná) řešení založená na kolmém napojování kabelů.

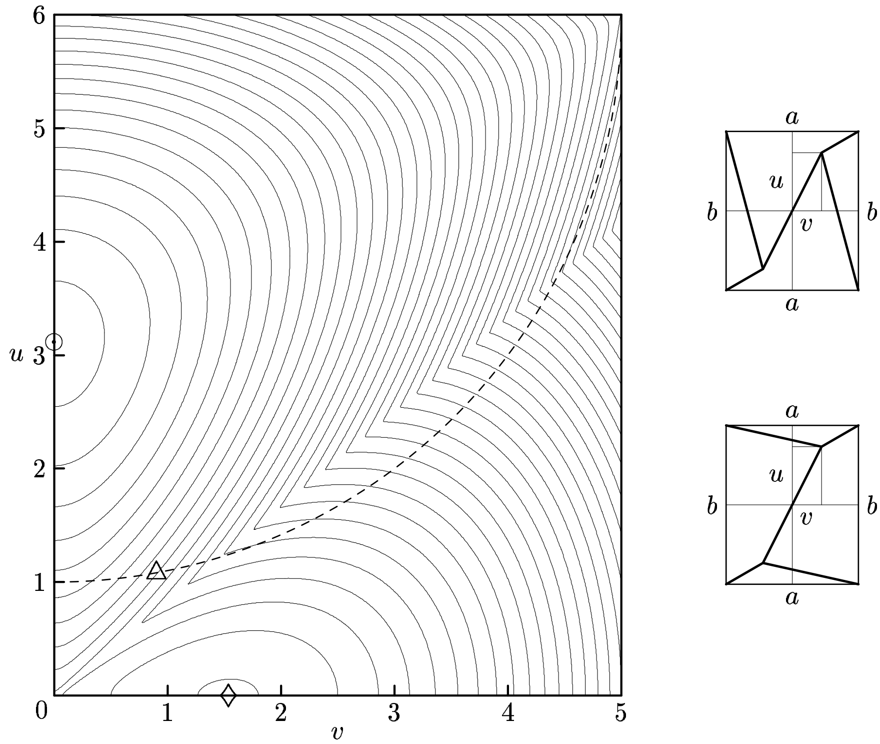
Fyzikální řešení problému

Mimo matematických postupů se problém nalezení optimální sítě dá řešit i experimentálně. Tyto postupy byly v několika řešeních zmíněny, ale vždy jen velmi obecně a okrajově.

Z fyzikálního hlediska je nejjednodušší hledání minima energie. K tomu stačí nechat zkoumaný systém dostatečně dlouho v klidu bez rušivých vnějších vlivů a on se postupně dostane do stavu s minimální energií (pokud zanedbáme netlumené kmity, které ale u reálných makroskopických experimentů stejně neexistují). Jediný problém je, že takovýto systém se zastaví v libovolném minimu energie. Nemusí jít o globální minimum, které hledáme. Pokud má zkoumaný problém pouze jedno minimum, není zde žádný problém. V opačném případě je potřeba najít všechna lokální minima a dodatečně rozhodnout, které z nich má nejnižší energii.



Převést celkovou délku spojů na energii systému lze poměrně jednoduše. V případě problému tří bodů k tomu budeme potřebovat například desku s malými otvory v místech těchto tří bodů. Dále vezmeme tři provázky, které jsou na jednom konci svázané dohromady. Volné konce provlékneme otvory v desce tak, aby uzlík zůstal nad deskou. Poté na ně zavěsíme závažíčka.



Obr. t3.6 – Celková délka sítě v obdélníku 12×10 v závislosti na poloze rozbočovačů. Délka je určena podle kratšího ze dvou zapojení zobrazených vpravo. Symbol $\odot$ značí hledané minimum, $\diamondsuit$ je druhé minimum, které není globální. Varianty kolmého připojení kabelů do rozbočovače, které někteří navrhovali, jsou pro topologii podle dolního obrázku znázorněny přerušovanou čarou a $\triangle$ odpovídá připojení dvou bodů kolmo k úhlopříčnému kabelu.

Energie tohoto systému je dána potenciální energií závaží. Pokud bereme desku za nulovou hladinu, každé závaží má hmotnost m a provázky délku a, pak zjevně platí $E_\mathrm{p} = -mg(3a - L)$, kde L je délka spojnic mezi městy na desce. Tento systém má jediné minimum energie odpovídající nejnižší možné hodnotě L. Po ustálení bude tedy uzlík ukazovat polohu rozbočovače.

V případě propojování více měst si už se závažíčky nevystačíme, protože jimi nelze realizovat rozbočovače. Použití pružinek (jak někteří navrhovali) není možné, protože jejich energie není přímo úměrná délce. Přímou úměrnost mezi rozměry a energií máme například u povrchového napětí (energie je přímo úměrná ploše hladiny). Experiment uspořádáme tak, že na destičku do místa, kde má být město, umístíme svislý kolík (hřebík). Celou desku ponoříme do mýdlové vody a po vytažení sledujeme tvar vzniklé mýdlové blány. Ta se vytvaruje tak, aby měla co nejmenší povrch (alespoň vzhledem k malým změnám, nemusí jít o globální minimum), a zároveň zůstane natažená na kolících. Pokud lze výšku blány považovat za konstantní, pak ukáže tvar sítě, která má (lokálně) minimální celkovou délku.

Další návrhy k přemýšlení

- Stále je tu otevřený problém optimální sítě pro čtyři města. Nezapomínejte na korektní důkaz.
- Existují některá jednoduchá pravidla, která musí splňovat každá síť (každý rozbočovač v síti, ...)?
- Zkuste se zamyslet nad propojováním bodů, které leží obecně v prostoru.

Marble & Martin Krsek

Řešení úloh

Úloha 10.1 – O nemožnosti sestrojit létající stroj těžší než vzduch (5b)

Zadání: *Pařížská akademie není zrovna nakloněna inovativním řešením problémů. Odmítá se zabývat perpetuem mobile, padání kamenů z nebe je podle ní výmysl opilých staříků, jenom blázen se může pokoušet sestrojit létající stroj těžší než vzduch ...*
Promluvte k pařížské akademii a přesvědčte veleváženě pány fyziky, že je možné sestrojit létající stroj těžší než vzduch.

Řešení:
Vašou úlohou bolo presvedčiť fyzikov Parížskej akadémie o možnosti zostrojiť stroj, ktorý je ťažší (má väčšiu hustotu) ako vzduch. Bodoval som predovšetkým dve veci – správnosť vysvetlenia rozdielu tlakov na hornej a spodnej strane krídla a argumentáciu s využitím vedomostí, ktoré mali fyzici v období zhruba v rokoch 1750–1900.

Fyzika krídla a Bernoulliho rovnica

Bernoulliho rovnica v tvare pre ideálnu nestlačiteľnú tekutinu

Väčšina z vás sa odvolávala na Bernoulliho rovnicu, ktorú popísal v roku 1738 Daniel Bernoulli:

$$p_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + h_1\rho g = p_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + h_2\rho g\,. \qquad \text{(r1.1.1)}$$

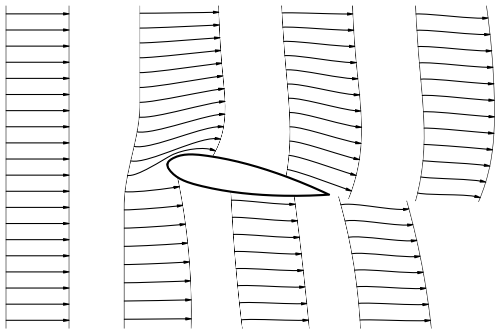
Táto rovnica popisuje zákon zachovania energie v tekutine. Ak predpokladáme, že tekutina prúdi vodorovne ($h_1 = h_2$), potom

$$p + \frac{1}{2}\rho v^2 = \text{konšt.} \qquad \text{(r1.1.2)}$$

Vidíme teda, že pri zvyšovaní rýchlosti prúdenia nám klesá tlak. Táto skutočnosť úspešne vysvetľuje viacero paradoxov. Skúste napríklad ústami fúknuť medzi dva listy papiera. Ak predpokladáte, že tieto dva listy sa od seba vzdialia, ste na omyle. Priblížia sa. Bernoulliho rovnica správne vysvetľuje, že vďaka pohybujúcemu sa vzduchu klesne tlak medzi oboma hárkami papiera a atmosférický tlak na opačnej strane ich pritláča k sebe.

Vysvetlí Bernoulliho rovnica vztlak?

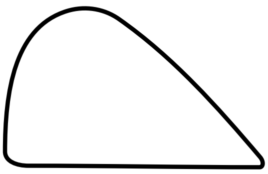
Použitie Bernoulliho rovnice pri vysvetlení vztlaku krídla (sily, ktorá pôsobí na krídlo smerom nahor) je ale nejasné. Predpokladá, že dve častice vzduchu blízko nábežnej hrany krídla sa musia za krídlom spojiť. Tento predpoklad sa volá *princíp rovnakého času*. Spodná časť krídla je pri pohľade na akýkoľvek obrázok kratšia ako vrchná. Používa sa teda argument, že keď vzduch obteká krídlo, tak nad krídlom musí vzduch tiecť rýchlejšie ako pod krídlom. Následne podľa rovnice (r1.1.1) dospejeme k záveru, že tlak nad krídlom je menší ako pod krídlom, čo nám má vysvetľovať vztlak pôsobiaci na krídlo.



Obr. r1.1

Využívame teda predpoklad, že vzduch ktorý prúdi pod krídlom, ho obtečie za rovnaký čas ako vzduch prúdiaci nad krídlom. Tento predpoklad je ale **nesprávny**.

Zoberme si aerodynamický tunel a púšťajme ním v pravidelných intervaloch farebný dym. Pokusy na modeloch ukázali, že vzduch, ktorý naráža na nábežnú hranu krídla, sa na opačnej strane nespája (viď obrázok r1.1). Naopak. Čiary spájajúce častice vypustené v rovnakom čase, ktoré sa pohybujú pod krídlom, sa voči čiaram nad krídlom spomaľujú.



Obr. r1.2

Ukážme si na príkladoch, že princíp rovnakého času neplatí. Predpokladajme, že platí. Ak by sme si odvodili rozdiel dĺžok krídla menšieho lietadla, tak rozdiel dĺžok spodnej a vrchnej hrany krídla by musel byť zhruba 50 %. Obrázok r1.2 ukazuje, ako by asi taký profil vyzeral.

Zrejme mi dáte za pravdu, že takéto krídla lietadla nemajú. Rozdiel medzi vrchnou a spodnou stranou dosahuje zhruba 2,5 %.

Alebo majme akrobatické lietadlo. Určite ste videli, že toto lietadlo je schopné letieť obrátené na chrbte. V prípade použitia Bernoulliho rovnice v jednoduchom tvare (r1.1.1) by muselo za každých podmienok klesať, čo je v rozpore s pozorovaním.

Otázka taktiež vyvstáva, ako by sme také lietadlo riadili? Geometria krídiel je pevne daná.[10] Jediný spôsob by bol regulovanie rýchlosti letu. Vždy zvyšovať rýchlosť, ak chceme letieť vyššie. A potom zasa znížiť na pôvodnú hodnotu. Neviem si predstaviť, ako by mohli za takejto situácie vôbec lietať stíhači.

Matematické rovnice popisujúce prúdenie tekutín

Bernoulliho rovnicu môžeme použiť, ale v pozmenenom tvare. Pôvodne je Bernoulliho rovnica odvodená z Navier-Stokesovej rovnice

$$\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla p + v\Delta \boldsymbol{v} + \frac{1}{3}v\nabla\nabla \cdot \boldsymbol{v} + \boldsymbol{G}\,. \tag{r1.2}$$

Táto rovnica je najvšeobecnejšia zo všetkých rovníc, ktoré sa používajú pri nevírivom (laminárnom) prúdení stlačiteľných viskóznych tekutín. Veličina $\boldsymbol{G}$ je hustota sily na jednotku hmotnosti. Z nej sa dá odvodiť Eulerova rovnica

$$\rho\left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla \boldsymbol{v}\right) + \nabla p = \boldsymbol{F} \tag{r1.3.1}$$

($\boldsymbol{F} = \rho\boldsymbol{G}$ je vnútorná sila na jednotku objemu pôsobiaca na kvapalinu), ktorá spolu s rovnicou kontinuity (vyjadrujúcou zákon zachovania hmoty)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = 0 \tag{r1.3.2}$$

popisujú prúdenie dokonale nevírivej, ideálnej tekutiny. Ak pridáme ešte podmienku dokonalej stlačiteľnosti a barotropnosti (kedy hustota nezávisí na teplote), dostávame Bernoulliho rovnicu v tvare

$$\frac{1}{2}\rho v_1^2 + p_1 - \rho\varphi_1 = \int_1^2 \boldsymbol{a}_t \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + p_2 - \rho\varphi_2 \quad \left(+\rho Y_{Z_{1,2}}\right)\,, \tag{r1.4}$$

kde φ je potenciál na jednotku hmotnosti, $\boldsymbol{a}_t$ zrýchlenie pôsobiace na tekutinu a mysteriózny člen $Y_{Z_{1,2}}$ popisuje disipatívne[11] sily (v zjednodušenej Bernoulliho rovnici (r1.1.1) je nulový). Určenie týchto disipatívnych síl je vo všeobecnosti

[10] Lietadlá s premennou geometriou krídiel lietajú všetky nadzvukovo. Vhodný profil krídla pri lete pod a nad zvukovou hranicou sa diametrálne líši a týmto spôsobom ušetríme množstvo paliva.

[11] Nekonzervatívne, nemajúce potenciál, zapríčiňujúce premenu mechanickej energie napríklad na teplo. Sila, je disipatívna, ak vykonala nejakú prácu, keď sa vrátime po uzavretej krivke do pôvodného miesta. V opačnom prípade, ak prácu nekonala, je to sila konzervatívna. Konzervatívnou silou je napríklad gravitačná alebo elektrická sila. Disipatívne sily pôsobia pri vírivom prúdení tekutín, Foucaultových prúdoch a miešaní cesta, z ktorého sa bude piecť chlieb.

nemožné (popis vírivého prúdenia je možné exaktne riešiť iba pre špeciálne počiatočné podmienky a zjednodušenia).

Ako to v skutočnosti je

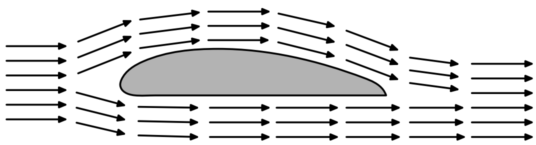
Vidíme, že opravená Bernoulliho rovnica (r1.4) sa od našej (r1.1.1) podstatne líši.

V praxi sa používa rovnica (r1.2), ktorá sa nerieši analyticky, ale modeluje sa na počítačoch. Používajú sa tiež rôzne zjednodušenia, ktoré urýchľujú výpočet. Leteckí dizajnéri používajú software, ktorý im priamo navrhne tvar krídla, aký potrebujú. Cena tohto software však môže byť aj niekoľko sto miliónov korún. Napriek tomu, že výsledky sú veľmi presné, pri názornom vysvetlení, prečo krídlo zdvíha lietadlo nahor, neuspejú. Ak hľadáme jednoduché vysvetlenie, ktoré by bolo pochopiteľné ihneď a dávalo aspoň približne rovnaké výsledky ako matka Príroda, tak tu zlyhávame.

Podľa rovnice (r1.4) možno spočítať tlak nad a pod krídlom, ak poznáme rýchlosti vzduchu okolo krídla. Ako ale určiť rozloženie rýchlosti okolo krídla? A čo ďalšie členy v rovnici?

Práca matka pokroku

Nedokonalosťou modelu využívajúceho Bernoulliho rovnicu (r1.1.1) je, že ignoruje prácu konanú krídlom ako aj disipatívne sily. Straty spôsobené vírivým prúdením zanedbajme. Za istých podmienok môžu mať podstatný vplyv na správanie sa krídla, nie sú ale potrebné pre vysvetlenie podstaty vztlaku.



Obr. r1.3

Pozrime sa na obrázok r1.3. Vzduch prichádza vodorovne na nábežnú hranu zľava, vodorovne. Nábežná hrana ho rozdeľuje na dve časti, ktoré sa za krídlom spájajú. Takéto obrázky vidno v niektorých učebniciach fyziky. Za krídlom je rýchlosť vzduchu rovnaká ako pred ním. To ale znamená, že nebola konaná žiadna práca, neexistuje žiadna sila, ktorá by ju konala. Naviac (viď str. 37), dá sa ukázať, že v prípade neviskóznej tekutiny (bez trenia) **nie je** možné predávať akúkoľvek hybnosť iným telesám v kvapaline. To znamená, že ak použijeme rovnicu (r1.1.1), tak nedokážeme krídlo zdvíhať. Tekutina obteká teleso a nepôsobí naň silou! Experimentálne to bolo pozorované u supratekutého hélia, ktoré keď striekali na vodorovnú dosku, tak ju obtekalo bez silového pôsobenia.

Riešenie založené na druhom Newtonovom zákone

Na obrázku r1.1 je ukázané, ako vzduch obteká krídlo v skutočnosti. Vzduch prúdi okolo krídla a zakrivuje sa nadol. Zakrivovanie vzduchu je podľa tretieho

Newtonovho zákona akcia, vztlak je reakcia. Zmena hybnosti vzduchu podľa druhého Newtonovho zákona

$$\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}t} = F \tag{r1.5}$$

vyvolá silové pôsobenie na krídlo. Keďže vzduch smeruje smerom nadol, sila na krídlo bude pôsobiť smerom nahor. Aby sa krídlo udržalo vo vzduchu, musí zmeniť smer toku veľkého množstva vzduchu.

Podľa rovnice (r1.5) je vztlak krídla

$$F = \frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = v_{\downarrow} \cdot \frac{\mathrm{d}m}{\mathrm{d}t} = Q_m \cdot v_{\downarrow}\,, \tag{r1.6}$$

kde Q_m je objemový tok vzduchu usmerneného smerom nadol a $v_{\downarrow}$ rýchlosť vzduchu smerom nadol. Podľa geometrie zhruba platí, že $v_{\downarrow} = v_{\mathrm{vpred}} \cdot \sin 2\alpha$, kde α je sklon krídla voči vodorovnej rovine (prúdu vzduchu). Vzduch prúdiaci nad krídlom môže vzorec (r1.6) pozmeniť, ale nie výrazne. Pravda, nad krídlom sa nesmú vytvárať víry, o čom si povieme neskôr.

Čo je podstatné a nie na prvý pohľad viditeľné, je, že Q_m je zhruba konštanta. Mohlo by sa zdať, že krídlo usmerní smerom nadol iba ten vzduch, ktorý naň dopadá (teda $S \cdot \sin\alpha$). Tento predpoklad je príliš zjednodušený. Vzduch, ktorý sa od krídla odrazí smerom nadol, so sebou berie aj svoje okolie. Na obrázku r1.1 vidíme, že krídlo ovplyvňuje vzduch ďaleko nad a pod sebou. Potom podľa rovnice (r1.6) dostaneme pre vztlak

$$F = HL\rho v_{\mathrm{vpred}} \cdot v_{\mathrm{vpred}} \sin 2\alpha \approx 2\alpha HL\rho v_{\mathrm{vpred}}^2\,, \tag{r1.7}$$

kde H je výška prúdu vzduchu, na ktoré krídlo silovo pôsobí, a L šírka krídla. Vidíme, že vztlak je priamo úmerný naklonenia krídla a druhej mocnine rýchlosti.

Spočítajme si, aké množstvo vzduchu musíme nasmerovať smerom nadol, ak sa máme udržať vo vzduchu. Majme malé lietadlo Z-37 Čmeliak, ktoré má hmotnosť 1 tonu a bežne lieta rýchlosťou zhruba 120 km/h. Za jednu sekundu pošle toto lietadlo svojimi krídlami smerom nadol ($\alpha = 5°$, čítaj ďalej)

$$m = Q_m \cdot 1\,\mathrm{s} = \frac{mg}{v_{\mathrm{vpred}} \sin 2\alpha} \cdot 1\,\mathrm{s} = 1\,700\,\mathrm{kg}\ \text{vzduchu}.$$

Pri rozpätí krídiel 12,2 metra a šírke krídla zhruba dva metre dostaneme $H = 3{,}2\,\mathrm{m}$ (použili sme rovnicu (r1.7)). V skutočnosti je hodnota H zhruba dvojnásobná. To znamená, že oblasť, ktorá pôsobí na krídlo vztlakom, je oveľa väčšia ako samotná hrúbka krídla. Tak veľké H je silným argumentom proti tomu, že vztlak je efekt spôsobený na povrchu krídiel (viď rovnica (r1.1.1)).

Ak by krídlo pôsobilo silou iba niekoľko centimetrov okolo seba, potom by bolo lepšie stavať nie jedno- a dvojplošníky, ale lietadlá s veľkým množstvom krídiel. Najviac krídiel nad sebou, čo sa naozaj použilo pri konštrukcii, boli tri – ale ešte v prvej svetovej vojne.

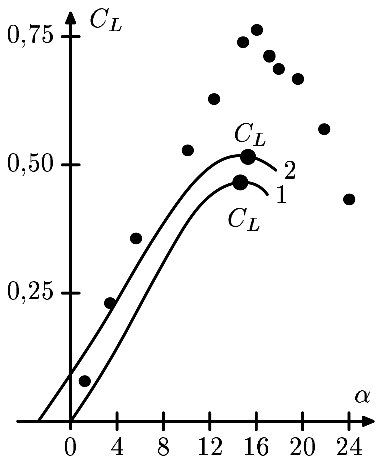
Sklon krídla

Ukázali sme si, že vztlak závisí na uhlu nábehu α lineárne. Pozrime sa na obrázok r1.4. Krivka 1 zobrazuje závislosť C_L na α pre symetrické krídlo (také, ktorého horná hrana vyzerá rovnako ako spodná, používajú ho napr. akrobatické lietadlá). Hodnota C_L je definovaná ako (S je kolmá plocha krídla)

$$F = \frac{1}{2} C_L S \rho v_{\text{vpred}}^2 , \tag{r1.8}$$

čiže pomocou Newtonovho vzťahu pre odporovú silu. Pri určitom náklone prestáva byť závislosť C_L (a teda aj vztlaku) na uhle nábehu lineárna a začína klesať. Čím je to spôsobené, si povieme v ďalšom odseku. Krivka 2 ukazuje závislosť pre nesymetrické krídlo. Zatiaľčo symetrický profil krídla nemôže produkovať žiaden vztlak pri $\alpha = 0$, nesymetrický áno.

Pozrime sa na experimentálne namerané hodnoty. Obrázok r1.4 ukazuje, že zhruba do $\alpha = 15°$ je vztlak lineárne závislý na uhle nábehu. Potom sa zlomí a začína klesať. To je dôvod, prečo sme zvolili pri Čmeliakovi $\alpha = 5°$. Vidíme, že experiment potvrdzuje pre malé uhly α teoretické výsledky. Inak, lietadlá sa pri pristávaní potrebujú zbaviť rýchlosti a potrebujú krídla prestali produkovať vztlak (lietadlo, ktoré pristáva iba pri vysokej rýchlosti, je z dôvodu rýchleho opotrebovania pri pristátí nerentabilné). Práve preto sa „stavajú na zadné“.



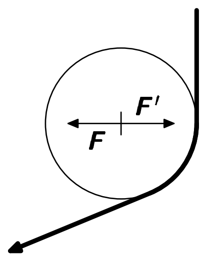
Obr. r1.4

Uhol, pri ktorom sa dosiahne maximálnej hodnoty C_L, sa volá *uhol pretiahnutia*. V okamihu jeho dosiahnutia nastáva odtrhnutie prúdu vzduchu od povrchu krídla, o čom si povieme neskôr.

Ďalej platí, že čím hrubšie krídlo, tým väčší je uhol pretiahnutia. Naopak, čím je krídlo tenšie, tým väčší uhol nábehu potrebujeme pre dosiahnutie určitého súčiniteľa vztlaku C_L.

Coandov efekt

Otázka znie: Prečo krídlo ohýba vzduch smerom nadol? Keď pohybujúca sa tekutina prichádza do kontaktu so zakriveným povrchom, vďaka povrchovému napätiu a viskozite k nemu priľne a sleduje ho. Ak si chcete tento efekt overiť, skúste dva experimenty. Pri prvom si zoberte prúd vody z vodovodu (pozor, aby sa nerozstrapatil) a priblížte k nemu valec o priemere 5–20 cm. Voda namiesto toho, aby naďalej tiekla smerom nadol (poprípade sa mierne odrážala od jeho povrchu a pôsobila naň silou smerom von), k povrchu priľne a pôsobí naň silou tak, že ho priťahuje smerom k prúdu vody



Obr. r1.5 – $\boldsymbol{F}$ je sila pôsobiaci na vodu a $\boldsymbol{F'}$ reakcia pôsobiaci na guľu.

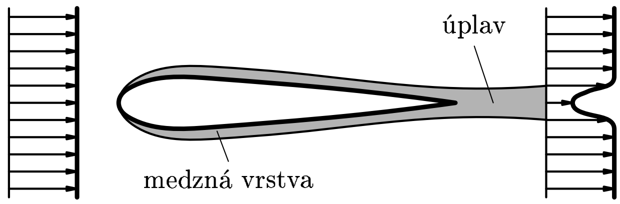
(viď obrázok). Tento jav je v literatúre známy ako *Coandov efekt*. Podľa prvého a tretieho Newtonovho zákona vieme, že ak sa smer prúdu vody zmení, musí na valec pôsobiť rovnako veľká sila opačného smeru, ako je sila spôsobujúca zmenu hybnosti prúdu vody.

Alebo si zoberte pingpongovú loptičku a fén. Fén nakloňte pod uhlom zhruba 40°–70° a do prúdu vzduchu položte loptičku. Napriek očakávaniu fén loptičku neodfúkne, ale bude ju držať v rovnovážnej polohe vo vzduchu, loptička bude levitovať zdanlivo bez pôsobenia akýchkoľvek síl.

Teória medznej vrstvy

Povedzme si teraz niečo o tzv. medznej vrstve, ktorá má pre lietanie zásadný význam. ***Medzná vrstva je tenká vrstva tekutiny priliehajúcej k povrchu telesa, v ktorej majú na pohyb tekutiny výrazný vplyv viskózne sily.*** Podstatne ovplyvňuje obtekanie vzduchu okolo krídla. Napriek tomu, že prúdenie okolo neho je turbulentné, v medznej vrstve (ktorá je hrubá najviac niekoľko milimetrov, skôr menej) je prúdenie laminárne, a preto vzduch nekladie krídlu príliš veľký odpor. Rozdelenie rýchlosti je tu úplne iné, ako by vyplývalo z teórie ideálnej kvapaliny. Jej tvar značne závisí na tvare profilu a uhle nábehu.

Toto je dôvod, prečo sa dlho nedarilo zostrojiť lietadlo s krídlami. Ľudia nemali znalosti o obtekaní krídla vzduchom. Laminárne profily vyžadujú presný tvar krídla, drobné poškodenie na krídle vrstvu poškodia a výrazne zvýšia odporovú silu pôsobiacu proti pohybu.



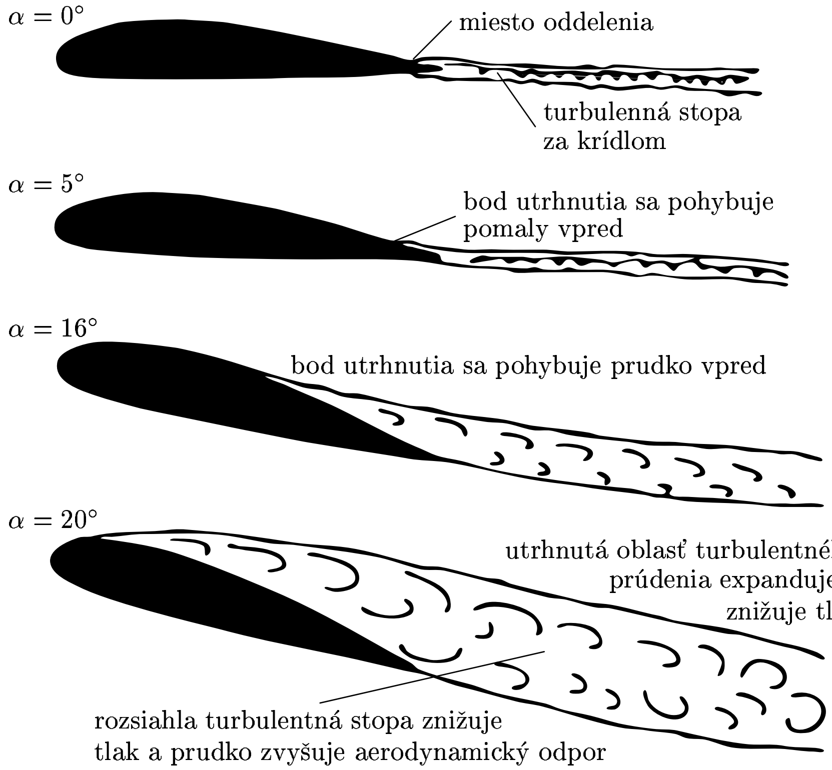
Obr. r1.6 – Medzná vrstva

Odporová sila závisí na hladkosti povrchu. Čím je povrch hladší, tým je prúdenie pri povrchu laminárnejšie a medzná vrstva sa horšie odtrháva. Príkladom buď pingpongová loptička ponorená do vody. Pri výskoku z vody so sebou berie aj značné množstvo vody, ktoré sa nachádza v medznej vrstve, a preto z nej takmer nevyskočí. Porovnajte si to s tenisovou loptičkou, ktorá ja poriadne chlpatá.

Vplyv medznej vrstvy na rýchlosť prúdenia je zobrazený na obrázku r1.6. V mieste tesne za krídlom je rýchlosť vzduchu menšia. Ak sa úplav vďaka turbulenciam rozpadne, prudko sa zvýši odpor prostredia.

Turbulentné prúdenie

Na obrázku r1.7 vidíme tvar prúdenia za krídlom pre rôzne uhly nábehu. Tu je vysvetlenie, prečo v istom okamihu nastáva zníženie vztlaku. V okamihu, keď je krídlo naklonené na uhol pretiahnutia, turbulentná vrstva sa za krídlom primkne k jeho vrchnej časti a odstráni medznú vrstvu. To má za následok jednak prudké zvýšenie odporu a jednak zníženie vztlaku. Vďaka vírom poklesne rýchlosť vzduchu, akou je krídlo obtekané, a proti vztlaku pôsobí dodatočne k tiažovej sile ešte rozdiel tlakov. Tu už môžeme použiť rovnicu (r1.1.1).

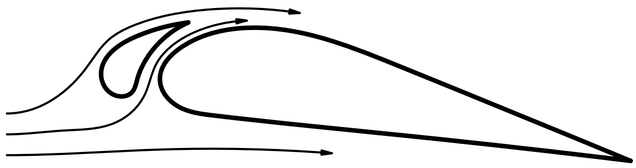


Obr. r1.7 – Závislosť spôsobu obtekania na náklone krídla Pri uhle $\alpha = 16°$ (uhol pretiahnutia) je vztlak maximálny.

Víry vznikajú predovšetkým na koncoch krídiel, keď zvyšujeme uhol nábehu. Na koncoch krídiel vznikajú nestability a turbulentné prúdenie môže oveľa ľahšie vzniknúť.[12] Odtiaľ sa šíria po celom krídle. Ak by sme tomu nezabránili, lietadlo nám skolabuje a zrúti sa. Pri vysokých rýchlostiach je potrebný menší uhol nábehu, aby sme dosiahli uhol pretiahnutia. Napríklad nadzvukové prúdenie sa nad krídlom objavuje už pri $v_{\text{vpred}} = 0{,}8c$ (c je rýchlosť zvuku).

Existujú rôzne spôsoby, ako zabrániť neželanému odtrhnutiu medznej vrstvy. Jedným z nich je napríklad slat – diera na nábežnej hrane krídla, ktorá zabraňuje vzduchu, aby sa nad krídlom príliš rýchlo pohyboval (viď obr. r1.8).

[12] Na koncoch krídiel sa používajú vodiace lišty zabraňujúce prenosu turbulencií na krídlo.



Obr. r1.8 – Slat

Rovnako sa nad krídlo neumiestňujú prúdové motory ani žiadne prístroje, pretože medzná vrstva by sa oveľa ľahšie odtrhla. Umiestňujú sa pod krídlo, rýchlosť prúdiaceho vzduchu je tu znateľne menšia a medzná vrstva tu nehrá podstatnú úlohu. Riadiace klapky sa umiestnia až za krídlo, jednak aby bolo krídlo stabilnejšie a aby sa turbulentná vrstva ťažšie posúvala smerom vpred pri vyšších rýchlostiach.

Trošku histórie

Prehistorické obdobie

Ľudstvo túžilo napodobniť let vtákov už odjakživa. Všetky staroveké národy majú báje o hrdinoch, ktorí sa pokúsili lietať. Buď im pomohla nejaká božská bytosť, alebo neuspeli a skončili pod konvalinkami. Tieto legendy naznačujú, že možno už v staroveku existovali ľudia, ktorí sa snažili zostrojiť niečo, na čom by sa dalo lietať. Príkladom buď antická báj o Daidalovi a Ikarovi.

V stredoveku sa lietajúci stroj pokúšal (okrem iných) zostrojiť, kto iný ako Leonardo da Vinci. Existujú náznaky, že so svojím lietadlom sa aj pokúšal vzlietnuť. V 18. storočí to bol mních fráter Cyprián, o ktorom sa traduje, že letel na vlastnoručne zostrojených krídlach z kopca ponad rieku a pristál na lúke za ňou. Za jeho počínanie ho obvinili z čarodejníctva a chceli upáliť. Nakoniec vraj spálili iba krídla. Pravdepodobne sa jednalo o rogolo.

Bratia Montgoflierovci zostrojili svoj prvý balón v roku 1783. Odvtedy sa vedelo, že človek prežije let vzduchom bez akejkoľvek úhony.

Po úžasných pokrokoch matematickej fyziky v 19. storočí (a najmä mechaniky tekutín) sa zdalo, že riešenie problému lietadla ťažšieho ako vzduch je veľmi blízko. Experimenty s balónmi boli úspešné už v predchádzajúcom storočí. Ale napriek všetkému pokroku, skutočný *poháňaný let* nebol uskutočnený celé 19. storočie. Lord W. Thompson Kelvin vyslovil koncom storočia (1895) názor, že zostrojenie stroja poháňaného vlastnou silou je pravdepodobne nemožné („*Heavier-than-air flying machines are impossible.*“). A to bol prezident anglickej Kráľovskej spoločnosti.

Našli sa ale aj ľudia, ktorí Kelvinov názor nezdieľali. Väčšinou experimentovali s klzákmi a rogalami. Dochoval sa citát Otta von Lillienthala: *Objaviť lietadlo je nič. Postaviť, to už je niečo. Ale lietať – to je všetko.* Pár dní pred svojou smrťou tiež vyhlásil: *Musíme prinášať obete.* Zomrel na následky zranení 10. 8. 1896. Klzák, na ktorom letel, sa zrútil.

Konečne úspech

Po množstve čiastočných úspechov v rôznych krajinách bolo experimentálne dokázané, že lietať je možné. Stalo sa tak vďaka objavu bratov Wilbura a Orvilla Wrightovcov. Postavili lietadlo schopné preletieť 40 metrov, let samotný trval iba niekoľko sekúnd. Pokus sa uskutočnil na nehostinnej pláži Kitty Hawk v Severnej Karolíne, 17. decembra 1903 ráno.

Motor bol vodou chladený štvorvalec vyrobený predovšetkým z ľahkého hliníku, bez benzínovej pumpy, karburátoru a sviečok. Nemal dokonca ani škrtiace klapky! Jeho výkon bol 8 kW a bol poháňaný petrolejom. Tento poháňal dve veľké vrtule, ktoré sa točili v navzájom opačných smeroch, aby sa vyhli gyroskopickému efektu.

Odborná verejnosť tento experiment odmietla, poukazujúc na nemožnosť zostrojenia podľa platných fyzikálnych zákonov. Neverili správam svedkov, ktorí videli lietadlo lietať, neverili fotografiám Wrightovcov. Napriek porušovaniu fyzikálnych zákonov už v júli 1909 Louis Blériot preletel na jednoplošníku Antoinette kanál La Manche (34 kilometrov).

V rokoch 1905–1910 boli vypracované dôležité časti mechaniky tekutín, ktoré porozumeli spôsobu obtekania krídla vzduchom – napr. práce L. Prandtla, M. Kutta, N. E. Žukovského, S. A. Čaplygina. Vypracovali koncepty cirkulácie, medznej vrstvy, odtrhávania medznej vrstvy od krídla, laminárneho a turbulentného prúdenia. Svetlo sveta uvideli nové časti aplikovanej matematiky – teória singulárnych perturbácií, transsonického a hypersonického prúdenia a matematická teória horenia. Vďaka nim poznáme teraz lietadla ako Concorde, Boeing 747 alebo Airbus A380.

Komentár k riešeniam

Viac ako polovina z vás popisovala vztlak pôsobiaci na krídlo pomocou Bernoulliho rovnice. Bohužiaľ, *nikto* z vás sa ani nepokúsil odhadnúť veľkosť sily, ktorou pôsobí podľa rovnice (r1.1.1) na krídlo. Ak by ste sa napr. pokúsili spočítať hmotnosť, akú unesú krídla Čmeliaka spomenutého na strane 26, dostali by ste hmotnosť menej ako 100 kg.

Je pravda, že v škole sa učí, že lietadlo lieta vďaka Bernoulliho rovnici – je to čiastočná pravda. Aby sme vysvetlili vztlak, musíme použiť rovnicu (r1.4). Avšak v knihách sú iba rovnice (r1.1.1) a (r1.1.2). Iba veľmi málo ľudí sa zamyslí, ako niečo v prírode funguje. Zvyšok sa podobá stádu. Naučia sa zopár poučiek, dostanú z fyziky za jedna a uspejú na krajskom kole fyzikálnej olympiády. Pekne to popísal Richard P. Feynman vo svojej knihe *To snad nemyslíte vážně, pane Feynmane!* keď popisoval brazílske školstvo – doporučujem prečítať.

Komentár k bratom Wrightovcom: Ľudia často používajú prírodné zákony tak, ako im to vyhovuje, potrebujú istoty. Šmahom vylúčia čokoľvek, čo je v rozpore s ich zažitými predstavami. Skutočný odborník by sa mal vždy zamyslieť nad tým, či jeho poznanie nie je v rozpore s novou teóriou, a ak áno, pokúsiť sa rozhodnúť, ktorá teória je správna pomocou experimentu. Najlepšie takého, kde tieto dve rôzne teórie predpovedajú diametrálne odlišné výsledky.

Na druhú stranu nás vedie snaha, ktorú Isaac Newton charakterizoval slovami: *Hypothesis non fingo – hypotézy neobjavujem.* Myslí sa tým, aby sme popisovali svoje okolie čo najjednoduchšie. Tento princíp sa často nazýva aj *Occamova britva* alebo princíp šporovlivosti – neprijímajme viacej predpokladov ako je nevyhnutné. Ako prvý ho vyslovil stredoveký filozof William Occam.

Musíme preto skĺbiť našu snahu o jednoduchosť a zároveň pravdivosť. Čím menej predpokladov urobíme, tým je menšia šanca na chybu. Občas sa ale stane, že predpokladov je príliš málo a náš model preto dáva nesprávne výsledky. H. G. Gold to popisuje presnejšie:

> Výsledky matematického skúmania je treba neustále konfrontovať s vlastnou intuíciou toho, čo predstavuje prijateľné fyzikálne správanie. Keď takáto kontrola odhalí nezhody, je treba vziať v úvahu nasledujúce možnosti:
>
> 1. V matematickom skúmaní došlo k formálnej chybe.
> 2. Východzie predpoklady sú nesprávne alebo prehnane zjednodušené. (Čo bol aj náš problém.)
> 3. Intuícia riešenia fyzikálneho problému je neadekvátna.
> 4. Došlo k objavu nového významného fyzikálneho princípu.

Stručne povedané, ak objavíme dačo, čo je v rozpore s našimi vedomosťami, je vhodné preskúmať to a prijať čo najjednoduchší a najpravdepodobnejší záver. V opačnom prípade môže nastať situácia, že teplo z radiátora vysvetľujeme tak, že v ňom je malý piadimužík, ktorý klepe do stien a zohrieva ich. Ľudí sa však bojí a dokáže sa pred nimi tak skryť, aby ho nikdy nevideli.

Najlepšie prejavy

Doc.[MM] Tomáš Štec

Hneď na začiatok si musíme ujasniť chybičku zadania, totižto, že nie je špecifikovaná doba, kedy máme akadémiu presviedčať. Súčasný stav síce nepoznám, ale za predpokladu, že akadémia nezanikla, by som ich presvedčil tým, že by som ich zavolal aby ma vyzdvihli z Charles de Gaulle International Airport (myslím, že na ChDG prilieta väčšina letov zo strednej Európy, keď nie tam, tak na Orly). Predpokladajme, že ich budeme presviedčať pred letom prvého motorového lietadla ťažšieho ako vzduch, teda ešte v storočí devätnástom. Včuľ presviedčam.

Vážení členovia akadémie, dovoľte, aby som Vám predstavil svoju obhajobu lietajúcich strojov ťažších ako vzduch. Ak dovolíte, začnem malou ukážkou, ktorá by niektorých z Vás už mohla presvedčiť.

Vyťahujem sklenenú rúrku, do ktorej je z jedne strany vložený magnet, ďalší potom vhadzujem do rúrky zhora.

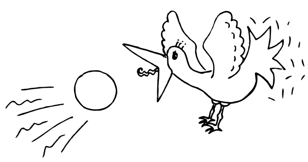
Ako vidíte, na lietanie nám stačia dva magnety. Keď ich otočíte správnymi stranami k sebe, vzájomne sa odpudzujú a jeden môže nad druhým letieť. Nemyslite si, že letí preto, lebo sa zasekol. Ako vidíte môžem rúru otočiť a magnet hneď vypadne. Ak ho zasunem opačne otočený, spadne až na spodný magnet, teda rúra priechodná je. Ale sily magnetické už určite poznáte. A čo sa týka hmotnosti, magnet si kľudne môžete poťažkať.

Pokračujme ale ďalej. Lietanie na magnetoch je totižto veľmi nepraktické, sila účinkuje len na malú vzdialenosť a vyrobiť veľké magnety je nesmierne ťažké. Preto musíme nájsť iný spôsob.

Vieme, že keď vystrelíme z dela guľu, preletí nejakú vzdialenosť a potom spadne na Zem. Prečo padá nám vysvetlil už pán Newton. Poviete, že keď spadne na Zem, nie je už delová guľa lietajúcim strojom, chceli by ste ju vidieť letieť veľmi dlho ba priam na večné časy. No, potom Vás možno uspokojí iná guľa, ktorá lieta už veľmi dlho – Mesiac. Vidím, že protestujete, ale je to tak. Poznáme predsa hmotnosť aj vzdialenosť Mesiaca a vidíme, že letí. Dokážeme aj určiť jeho rýchlosť. Keby sme dokázali zrýchliť delovú guľu na podobnú rýchlosť, ako má Mesiac (rádovo), tiež by ostala lietať na večné časy nad Zemou. A dostatočne zrýchliť delovú guľu je len vec správnej veľkosti kanónu a nálože.

Alebo môžeme použiť iný princíp – veď isto poznáte strašnú Čínsku zbraň – rakety. Veď rakety lietajú, a pritom sú ťažšie ako vzduch. Ďalší podobný príklad pochádza tiež z Číny – drak, alebo šarkan, ako sa tiež hovorí. Nepochybne vieme, že papier je ťaží ako vzduch, veď keď ho položím na stôl, tak nevzlietne. Ale stačí pár preložení papiera (*staviam hádzadlo – šípku*) a keď ho hodím, kľudne preletí celú miestnosť.

To už je pekný výsledok na jeden list papiera. Ale oponujete, že papier je veľmi slabý a že z neho lietadlo ťažšie ako vzduch nepostavím tak, aby mohlo aj niečo odviezť. To je pravda. Ale základný princíp je rovnaký – potrebujeme vztlak, čo je sila, ktorá vyrovná tiaž tohto lietajúceho stroja.

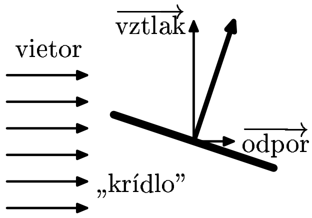


Ako vztlak vytvoríme? No, predstavme si dosku (napríklad drevenú) v silnom vetre. Kým je doska k vetru natočená hranou (majme ju vodorovne), nič sa nedeje a vietor okolo dosky prúdi. Predstavme si vietor ako množstvo guličiek prúdiacich vysokou rýchlosťou proti doske. A teraz začnime prednú stranu dosky (to je tá, na ktorú fúka vietor, či podľa modelu narážajú guličky) zdvíhať. Stačí len o málo a už ucítime, že sa celá doska zdvíha a zároveň nás ťahá v smere vetra rovnako ako plachta na lodi. Ale zaujímavé je, že sa zdvíha. Prečo? No, vzduch, či guličky, prejdú za zdvihnutú hranu dosky a narazia na jej spodnú stranu. Odtiaľ sa potom odrazia a pokračujú po zmenenej dráhe ďalej.

Ale keď sa odrážajú, musí na nich doska pôsobiť nejakou silou (pretože tak hovorí Newtonov zákon, že bez sily niet zmeny pohybu). Teda doska pôsobí na guličky, či vzduch silou a odtláča ich nadol, lenže, zas podľa Newtona, ak teleso A pôsobí na teleso B silou, potom aj teleso B pôsobí na teleso A rovnako veľkou silou opačného smeru. Ak teda doska pôsobí na guličky (vzduch) smerom dolu, potom guličky (vzduch) pôsobia na dosku silou, ktorá smeruje nahor. A už máme potrebný vztlak.[13]

[13] Vieme ale, že toto vysvetlenie nie je úplne presné a že presnejšie by bolo povedať, že tým, že sme zdvihli prednú časť dosky, tak vzduch, ktorý by normálne letel ponad dosku bude natlačený pod ňu, preto nad doskou vznikne

Zároveň ale vidíme, že sila nepôsobí len nahor, ale aj dozadu, takže by sa toto naše *krídlo* malo pohybovať dozadu. To by nám určite nebolo milé, takže ho prichytíme napríklad povrázkom. A už máme najjednoduchšieho čínskeho šarkana.



Obr. r1.9

Na rovnakom princípe však môžeme zostrojiť aj podstatne zložitejší stroj. Musí ale byť z ľahkých materiálov, aby vztlaková sila zvládla prekonať jeho tiaž. Preto použijeme na konštrukciu ľahké drevo (napríklad balzu), a aby sme zakryli diery, plátno. Jeden taký, aj keď zmenšený tu mám. Tento stroj nepotrebuje vietor, lebo ekvivalentom vetra je, keď sa pohybuje dostatočne rýchlo dopredu. Lenže ako vidíme z obrázku r1.9, časť sily pôsobí aj proti smeru pohybu, čiže nám let spomaľuje.

Takže ak ho teraz hodím, rýchlosť naberá len pomalým klesaním, teda vlastne veľmi predĺženým pádom. No keď ho vyhodím až pod strop, môže tu lietať aj pár minút, a to je dosť. Keby nebol postavený tak, aby lietal v kruhoch, ale aby letel rovno (čo je najmenší problém) a hodili by sme ho z vysokej veže, zaletel by iste veľmi ďaleko.

Pokiaľ nechceme, aby klesal, musíme mu vymyslieť vhodný pohon, ktorý ho bude ťahať dopredu, aby si zachoval dostatočnú rýchlosť. Na to ale ľudské svaly sotva stačia. Dokonca aj parný stroj je priťažký na to, aby sa s ním dalo letieť. Môžeme ale použiť raketu. Tá nám dá dostatočnú rýchlosť na to, aby sme sa vzniesli a nabrali výšku, potom už budeme len pomaly klesať.

Ak ste si už pozreli ten model, zrejme ste si všimli, že krídlo nemá tvar jednoduchej dosky. Tvar, ktorý na tomto krídle vidíte, je totižto tvarom vtáčieho krídla. Vtáčie krídlo sa za dlhú dobu, čo už vtáci lietajú nad touto planétou, stalo takmer dokonalým.

Nakoniec by prišli plány vetroňa v skutočnej veľkosti s raketovým pohonom, na predvádzací let, a teda žiadosť o menšiu pomoc v zháňaní paliva do raketového motora, najskôr pušného prachu, alebo strelnej bavlny ...

Bc.$^{\text{MM}}$ Honza Havlík

Vážení kolegové.

Cílem mé dnešní přednášky by mělo být odpovědět na jednu poněkud kontroverzní otázku.

Je možné, aby létalo něco těžšího než vzduch?

Představme si modelový příklad. Vezmeme závaží o hmotnosti 1 kg a položíme ho na zem. Odstoupíme a pozorujeme, co se bude dít. Ano, jak jistě většina z vás podle své zkušenosti odhadla, nic se nestane. Závaží zůstane ležet na místě, kam jsme ho položili. Nyní provedeme druhý pokus. Závaží zdvihneme do výšky jednoho metru a upustíme. Jak jistě již tušíte, závaží během

nedostatok vzduchu, teda podtlak a pod doskou prebytok, teda pretlak (nie paradajkový!). No a tento rozdiel tlakov spôsobí vztlak.

chvíle opět dopadne na zem. Na závaží tedy musí působit jakási síla táhnoucí závaží k zemi. Tato síla se nazývá tíhová – F_G.

Velikost této síly je vyjádřena vzorcem $F_G = mg$, kde m je hmotnost předmětu a g je tíhové zrychlení, tj. zrychlení padajícího tělesa. (Jeho velikost na zemi je přibližně $10\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$.)

Směr síly je téměř přesně do středu Země.

Zde jsme si dokázali, že na každé těleso působí tíhová síla, a pokud nebude působit nějaká síla proti ní, bude těleso nemilosrdně staženo směrem k zemi.

Nyní máme několik možností, jak tíhovou sílu „přebít] jinou silou. Při vektorovém součtu této síly se silou tíhovou by výslednice sil měla směřovat směrem od středu země. Rychlost stoupání bude přímo závislá na velikosti této síly.

První možnost, jak toho dosáhnout, je Vám všem jistě známý vynález bratří Montgolfiérů – montgolfiéra, neboli také horkovzdušný balon. Tento vynález využívá velice zajímavé vlastnosti vzduchu. Při konstantním tlaku má totiž teplý vzduch menší hmotnost než stejný objem vzduchu studeného. Pokud tedy naplníme nějaký předmět dostatkem teplého vzduchu, měla by být celková hustota předmětu menší než hustota okolí a předmět by se měl přesně podle Archimédova zákona vznést.

Vzduch lze totiž v tomto případě považovat za hodně řídkou kapalinu. Naplníme-li tedy předmět kapalinou řidší než studený vzduch (teplý vzduch, plyn lehčí než vzduch, ...), předmět bude tažen silou vzhůru.

Toto je ovšem příklad tělesa lehčího než vzduch. Problém tkví v tom, zda je možné vynést do vzduchu i předmět s hustotou vyšší, něž je hustota vzduchu.

Dovolte mi krátký příběh. Nedávno se mi stala zajímavá věc. Byl jsem na procházce lesním parkem. Pomalu jsem se procházel a kochal barvou zlátnoucího listí pomalu padajícího na zem. Když v tom se přiřítil silný poryv větru a kromě listů zvedl do vzduchu i můj klobouk. Pro lidi procházející kolem poskytoval muž marně honící svůj klobouk po lese jistě dobrou šanci k pobavení. My bychom si ale měli položit velice důležitou otázku.

Jak je možné, že se listy i klobouk vznášely vzduchem, i když jsou těžší?

Odpověď je jednoduchá. Tlak vzduchu působící na předměty s dostatečně velkým poměrem plochy ku hmotnosti předmětu je schopen předměty nadzvednout, ba dokonce udržet ve vzduchu po dlouhé hodiny. Stačí si jen vzpomenout na dobu, kdy jste jako malí kluci pouštěli na kopci za městem draky. Takový drak je jasným příkladem předmětu těžšího než vzduch, a přeci letícího. Síla, která ho drží nad zemí, je tak velká, že kdysi dávno dokonce jeden anglický gentleman zkusil nechal za větrného počasí táhnout kočárový vůz pomocí draků. Pokud si článek dostatečně pamatuji, dosáhl poměrně velké rychlosti.

Zde nejspíše namítnete, že síla držící draka ve vzduchu je vítr, a ten je značně nespolehlivý.

Vzpomeňte si tedy prosím na to, co se s drakem dělalo v případě, že při zemi byl vítr slabý a neunesl ho. Draka, ihned poté, co byl puštěn asistující osobou, táhl za sebou utíkající chlapec. Pozoruhodné je, že během doby, co dotyčný klučina utíkal, drak stále stoupal do výše.

Z této vzpomínky tedy můžeme vyvodit podmínku nutnou pro to, aby se vzneslo těleso těžší než vzduch i bez pomoci větru. *Totiž: Musí být taženo dopředu nějakou silou.* Tato síla se už při vhodném tvaru tělesa sama postará o to, aby se těleso udrželo ve vzduchu.

Nastává však problém, kde onu sílu získat. Zde se velice osvědčilo zařízení zvané vrtule. Můžeme si ho představit jako ramena větrného mlýna, jenže obrácené. Pokud takovéto zařízení roztočíme dostatečně rychle, vyvine tah schopný unést jak motor, tak i křídla k němu přidělaná. Současné parní stroje mají bohužel příliš nízký poměr výkonu ku hmotnosti. Pokud by se ovšem v tomto odvětví uplatnil vynález nového druhu motoru, který při stejném výkonu bude lehčí, neměl by být problém sestrojit stroje schopné letu i za podmínek bezvětří. Troufám si dokonce říci, že by tyto stroje jednou mohli díky své rychlosti a schopnosti přeletět pozemní překážky jednou na delších trasách nahradit zaoceánské lodě.

Niektoré vaše zaujímavé myšlienky

Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Demín ukázal, že vzduch váži zhruba 10^{14} kg a nedomnieva sa, že by niekto lietadlo s ešte väčšou hmotnosťou skonštruoval. Svoje tvrdenie však nedokazoval, principiálne nevidím problém, prečo by to nešlo, nemá preto plný bodový zisk.

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dostál sa zaoberal levitáciou pomocou magnetov. Domnievam sa osobne, že touto argumentáciou by u akademikov neuspel. Myšlienky géniov sú preto geniálne, lebo im nikto nechápe. :-)

Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Gavenčiak by demonštroval draka – šarkana. Ukázal by na ňom, že ak nefúka vietor, je možno s ním bežať, a tak vytvárať pohyb a vztlak. Potešujúce je, že sa zamýšľa nad tým, ako budú akademici reagovať. Nanič je akákoľvek prednáška v akadémii, ak táto nepochopí, o čom autor hovorí (viď predchádzajúci odstavec). Akadémiu by sa pokúsil presvedčiť balzovým klzákom poháňaným vrtuľou na gumičke.

Peter Greškovič by zostrojil primitívne lietajúce rakety, aké používali Číňania už v stredoveku atď.

Ako by reagovali akademici?

Myslenie a vedomosti ľudí v minulosti boli iné, ako máme teraz. Ľudia z minulosti by nechápali, o čom hovoríme, ak by sme popisovali dnešné javy a zákony, ktoré poznáme. Považovali za samozrejmé iné skutočnosti, o ktorých teraz vieme, že nie sú pravdivé, a naopak veľa vedomostí z dnešnej doby im nič nehovorilo (napr. rádio, kvantová mechanika či Glummov princíp).

Základom riešenia bolo pokúsiť sa relatívne jednoduchý problém vysvetliť niekomu inému, ktorý má málo vedomostí, ale dobrú hlavu. Oprostiť sa od naučených vedomostí a použiť iba tie, ktoré máte spoločné.

Uvádzam niektoré vaše argumenty a protiargumenty, ak by som bol členom Parížskej akadémie koncom 18. storočia.

Vtáci lietajú a sú ťažší ako vzduch.

To je pravda, ale vtáci lietajú vďaka *vis vitalis*, živej sile. Táto sila je spojená s živým a čokoľvek iného túto silu nemá. Nemôžeš zostrojiť stroj a vdýchnuť mu život!

Vtáci sú ľahší ako vzduch. Pri svojom lete povetrím predsa v sebe zohrievajú vdychovaný vzduch, a vďaka tomu sú ľahší.

Napríklad rakety na čierny prach alebo stlačený vzduch sú ťažšie a lietajú.

Nedajú sa ovládať. Raz sa vystrelia a už len padajú, rovnako ako delové gule. Dá sa človek, ktorý vypadne z okna, považovať za vtáka?

Veď už Daidalos . . .

Sú to iba báje, výmysly ľudí, ktorí chcú lietať a ktorým sa to nikdy nepodarí. Preboha, snáď neveríte, že Daidalos naozaj zostrojil krídla a preletel nimi more? Viete koľko energie by musel spotrebovať? A naviac, ak Ikaros letel vyššie k Slnku, to ho nemohlo spáliť, pretože je stále rovnako strašne ďaleko.

V 18. storočí D'Alembert ukázal, že ideálna tekutina bude obtekať krídlo bez akéhokoľvek silového pôsobenia, na čo sa môžu akademici odvolávať. Naozaj, príroda neposlúcha teoretickú mechaniku, ale sama seba. Súhlas experimentu s teóriou nám hovorí, že teória je správna ako fyzikálny model skutočnosti, ale nie, že je bez chyby. Teóriu principiálne nemožno nikdy potvrdiť, možno ju iba vyvrátiť.

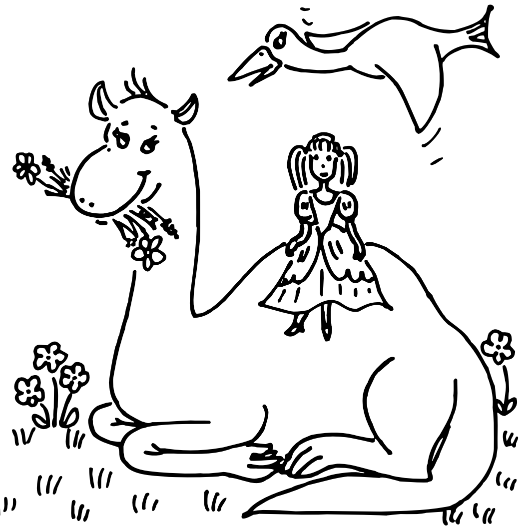
Bzučo

Úloha 10.2 – Brontosaurus (5b)

Zadání: *Jaká je pravděpodobnost, že ve skleničce vody, kterou jste právě vypili, byla i molekula vody, která byla kdysi součástí těla brontosaura, jehož kost se nachází v pařížském přírodovědeckém muzeu.*

Řešení:
Ze všeho nejdříve bych rád reagoval na neoprávněné napadení pařížského muzea některými kolegy, cituji jednoho z nich: „Žádný známý dinosaurus, či jiné vědě a archeologii známé zvíře, nebylo pojmenováno brontosaurus.“ Není to pravda. Roku 1879 byla objevena kostra dinosaura, který byl považován za příslušníka nového druhu nazvaného brontosaurus. Až v roce 1903 bylo zjištěno, že se ve skutečnosti jednalo o dospělého příslušníka druhu apatosaurus. Název se mezitím vžil natolik, že se v dnešní době používají oba výrazy. Abychom si tedy správně rozuměli, v zadání úlohy jsme měli na mysli příslušníka řádu

Saurischia, podřádu Sauropodomorpha, infrařádu Sauropoda, druhu apatosaurus (brontosaurus). Musíme ale dát zapravdu námitce, že brontosaurus není správný paleontologický název. Z řešení kolegy Mgr.MM Uličného se ukázalo, že v pařížském přírodovědeckém muzeu se nevyskytuje ani kostra apatosaura, natož pak brontosaura. Přiznáváme, že nikdo z nás dosud ve výše jmenovaném muzeu nebyl a vůbec nás nenapadlo, že by v takovém muzeu neměli kostru něčeho tak běžného, jako je apatosaurus. Ale je už na čase zanechat řečnění a vrhnout se na příklad.



Celé řešení rozdělíme na několik fází. V první části spočteme, kolik molekul brontosauří vody na světě vlastně bylo, a nebudeme vůbec uvažovat rozklad vody nebo jiné procesy. V té druhé části už započteme disociaci vody a další vlivy. Takže část první:

Kdysi tady byl brontosaurus a jeho tělem po různých cestách procházela voda. Ta voda se dostala z něj zpět do přírody. Takový brontosaurus běžně vážil 6 až 60 tun (rozdíly v jednotlivých zdrojích jsou opravdu velké). Vezmeme tedy něco uprostřed, dejme tomu 30 t (budeme provádět řádový odhad, a tak nás nějaká ta tuna nezabije). No a každé takové zvíře pije a jí. Dle mého dohadu, člověk denně do sebe dostane z různých zdrojů okolo 5 l tekutin (cca 1/18 jeho váhy), a ty zase denně dostane ven. Kdyby to podobně platilo u brontosaura, zjistíme, že vypije přibližně 1 000 l vody denně. Pokud vezmeme odhadem, že takový brontosaurus žil okolo sta let, tak nám vyjde, že za svůj život projde jeho tělem zhruba 40 000 t vody.

Takové množství vody tvoří N_0 molekul, které určíme ze vzorce

$$N_0 = N_{\mathrm{A}} \frac{m}{M}\,, \tag{r2.1}$$

kde N_{A} značí Avogadrovu konstantu ($N_{\mathrm{A}} = 6{,}022 \cdot 10^{23}\,\mathrm{mol^{-1}}$), m hmotnost vody (v našem případě 40 000 tun) a M představuje molární hmotnost vody ($M = 18 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{t} \cdot \mathrm{mol}^{-1}$). Vychází nám tedy, že N_0 je řádově 10^{33} molekul vody. Takovou „přesnost" budeme dodržovat po celou dobu výpočtu. Když uvážíme znalosti, které o brontíkovi máme, nemá smysl uvádět výsledek typu $1{,}3382574216 \cdot 10^{33}$.

A molekuly už si vesele kolují po Zemi. Můžeme s velmi dobrou přesností předpokládat, že se smíchají se všemi molekulami vody na Zemi (tedy s objemem $V = 1{,}4 \cdot 10^{21}\,\mathrm{l}$). Voda je převážně v oceánech (97 %) a jen 2 % vody je uchováno v litosféře a ledovcích, kam se naše brontomolekuly jen tak nedostanou. V současné době se ročně do atmosféry vypaří a následně spadne ve formě srážek $4{,}5 \cdot 10^{14}\,\mathrm{m}^3$ vody. Cirkulace se sice týká jen některých molekul, převážně při hladině oceánu, ale za dobu 10^8 roků už dojde k dobrému promíchání všech molekul oceánu.

Jaká je tedy pravděpodobnost, že najdeme alespoň jednu sledovanou molekulu ve skleničce vody, která celá obsahuje 10^{25} molekul vody? Abychom příklad převedli na klasickou pravděpodobnostní úlohu, řekněme, že máme obrovské množství kuliček, kde platí, že na jednu bílou (brontosauří) kuličku (molekulu) připadá

$$\frac{m(\text{vody na Zemi})}{m(\text{vody z brontosaura})} \approx 10^{14}$$

černých kuliček. Jaká je pravděpodobnost toho, že při losování 10^{25} kuliček se nám podaří vytáhnout alespoň 1 bílou kuličku?

Nejjednodušší řešení je, že vypočteme pravděpodobnost toho, že všechny vytažené molekuly budou černé. To by musel nastat při 10^{25} pokusech tentýž výsledek, jenž má pravděpodobnost $(1 - 1/10^{14})$. Pravděpodobnost toho, že vytáhneme právě černou kuličku, se nám v průběhu pokusu nemění. Toto tvrzení je oprávněné tím, že vybíráme z obrovského množství kuliček (molekul). Pravděpodobnost toho, že ve skleničce nebude ani jedna brontomolekula je:

$$p_c = \left(1 - 1/10^{14}\right)^{10^{25}} . \tag{r2.2}$$

Takový výpočet je třeba provést oklikou (počítač až příliš rád zaokrouhluje). Použil jsem toho, že

$$\lim_{n\to\infty} (1 - 1/n)^n = e^{-1} .$$

výraz pro p_c má tvar

$$\left((1 - 1/n)^n\right)^{10^{11}} ,$$

kde $n = 10^{14}$ – to už je dostatečně vysoké n, abychom mohli závorku považovat za číslo e^{-1}. Výsledná pravděpodobnost $p_c = 0$. Až bude opět volná zadní stránka, necháme vytisknout přesnější hodnotu.

To máme zatím jen pravděpodobnost toho, že ve skleničce budou samé nebrontosauří molekuly – jev, který řešíme my, tj. že tam bude alespoň jedna, je jev opačný a pravděpodobnost, že nastane je

$$p = 1 - p_c = 1 . \tag{r2.3}$$

Výsledkem první fáze výpočtu je, že kdyby se všechny molekuly dinosaura dochovaly až do našich dob, pravděpodobnost nalezení alespoň jedné ve skleničce vody je jedna – s přesností rozhodně lepší než $1 : 10^{10}$.

Teď ale přichází ještě zapeklitější druhá fáze výpočtu. Molekuly vody nemají lehký osud – jsou neustále rozkládány (disociovány) všemi možnými způsoby (zanedbáme případy, kdy se jedna brontomolekula rozloží a opět složí zpět).

Mezi námi a brontosaurem leží přibližně 200 milionů (tj. $2 \cdot 10^8$) let. Otázka je, jak rychle se rozloží právě námi sledované molekuly. Ty jsou zamíchány mezi ostatní molekuly vody a spolu s nimi se neustále rozkládají a stejně rychle skládají (celkové množství vody na Zemi zůstává neustále přibližně stejné).

Budeme teď předpokládat, že rychlost disociace vody je od dob dinosaurů až k nám pořád stejná. Nebudeme hledět na vodu, která nám sem přilétává z kosmu a na další méně důležité faktory.

Čím více brontomolekul je ještě na světě, tím větší je pravděpodobnost, že se jedna z nich disociuje. Když si označíme N počet brontomolekul na světě, lze tuto myšlenku zapsat matematicky:

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau} \cdot N\,. \tag{r2.4}$$

Zlomek $1/\tau$ určuje rychlost disociace a τ má význam střední doby života molekuly vody. Místo $1/\tau$ bychom mohli použít jakoukoli jinou konstantu, ale zlomek právě v tomto tvaru má tu výhodu, že obsahuje střední dobu života molekuly vody, což je dobře pochopitelná a měřitelná veličina. Znamená toto: vezmeme, dejme tomu, sto tisíc molekul vody a budeme pozorovat, kdy dojde k prvnímu rozkladu každé z molekul vody. Když zprůměrujeme jednotlivé časy prvního rozkladu molekuly, dojdeme ke střední době života molekuly vody.

Řešením diferenciální rovnice (r2.4) je:

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-t/\tau}\,, \tag{r2.5}$$

kde N_0 jsme počítali již dříve a určuje počet brontomolekul vzniklých za dobu života dinosaura.

Teď už všechno záleží na určení τ. Slušný odhad střední doby života lze spočítat z pravděpodobnosti disociace molekuly vody při nárazu (přes pH vody) a četnosti nárazů. Je to zdlouhavý výpočet a vede na střední dobu života řádově hodiny. Dosazením do vypočtené závislosti $N(t)$ vypočítám, že v současné době by už po světě neměla putovat ani jedna brontomolekula; opět s vysokou přesností. Samozřejmě lze namítat, že odhadnutá doba života je nepřesná. Ve skutečnosti, pokud bychom střední dobu života molekuly vody zvýšili až na milion let, přesto by byl současný počet brontomolekul nulový.

Proto i vy byste marně hledali molekulu brontosaura ve své skleničce. Pokud ji náhodou najdete, schovejte si ji a s příštím řešením nám ji pošlete.

Charlie

Úloha 10.3 – Napnutý provázek (3b)

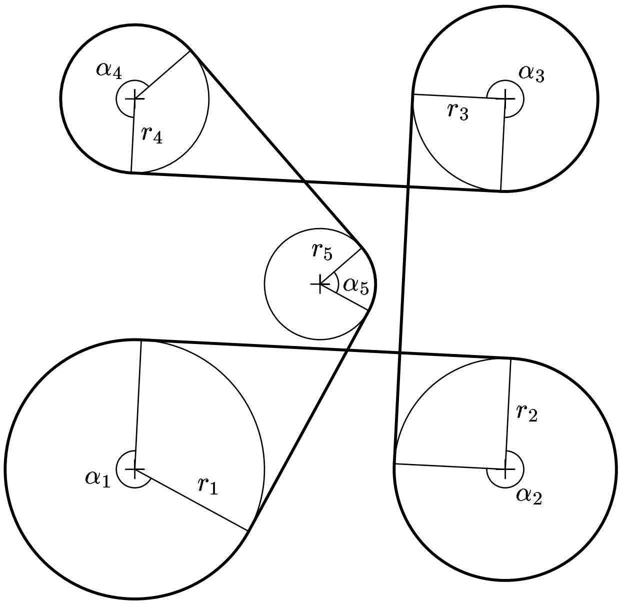
Zadání:

Spočtěte, jaký úhel opíše provázek okolo pěti kruhů se středy ve vrcholech čtverce a v průsečíku jeho úhlopříček. Úhel opsaný kolem kruhů je součet úhlů $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$. Strana čtverce má délku $a = 20\,\mathrm{cm}$ a poloměry kruhů jsou $r_1 = 7\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 6\,\mathrm{cm}$, $r_3 = 5\,\mathrm{cm}$, $r_4 = 4\,\mathrm{cm}$ a $r_5 = 3\,\mathrm{cm}$. Situace je znázorněna na obrázku r3.1.

Jako bonus se pokuste spočítat, jaký maximální a minimální úhel dostaneme, když můžeme pohnout kruhy tak, aby nedošlo k žádnému dalšímu doteku provázku a kruhů. Provázek je pružný, takže vždy zůstane napnutý.

Řešení:

Mysleme si provázek orientovaný určitým směrem (například ve směru rostoucích čísel kružnic). V každém místě provázku můžeme určit jeho směr. Tento směr se mezi jednotlivými kružnicemi vždy zachovává. To je zjevným důsledkem toho, že je provázek napnutý. Pak je tedy např. úhel α_2 rozdíl směrů provázku před a za kruhem o poloměru r_2.



Obr. r3.1

V úloze je potřeba zjistit celkový opsaný úhel, tedy úhel, o který se změní směr provázku po proběhnutí celé smyčky. Provázek totiž mění na všech kruzích svůj směr ve stejném smyslu, takže mohu jednotlivé úhly bez problémů sčítat.

Začneme tedy například mezi kruhy 1 a 2. Po oběhnutí kruhu 2 se provázek někde na obvodu kruhu 3 dostane do stejného směru, jaký měl na počátku. Mezitím se ovšem otočil o plný úhel, takže zatím máme 2π. Následující místo, ve kterém má provázek stejný směr, je někde na obvodu kruhu 4. Změna směru provázku je ve stejném smyslu jako předchozí, takže celkový úhel je už 4π.

Další místo se stejným směrem je už naše počáteční, takže po přidání ještě jednoho plného úhlu vyjde hledaný opsaný úhel

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 = 6\pi\,.$$

Pokud budeme kruhy pohybovat, změní se poloha míst, kde provázek získá stejný směr, jako má na počátku. Nicméně na celém provázku zůstanou tato místa vždy tři, takže zůstane stejný i výsledný úhel.

Marble

Vánoce s
lišákem
Richardem

Výsledková listina

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	r1	r2	r3	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
			Úlohy							
1.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Musílek	22		4	3	15			22	22
2.–4.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Olšina	75					20		20	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Dostál	20	3	4		13			20	20
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Eva Černohorská	20		4			8	8	20	20
5.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Peter Perešíni	16	2	3	3	8			16	16
6.–7.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Tereza Klimošová	54					15		15	15
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Štěpánka Mohylová	19			2	5	5	3	15	15
8.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jana Babováková	48			3		9	2	14	14
9.–10.	Doc.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Štec	192	5	5	3				13	13
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Tomáš Gavenčiak	20	5	5	3				13	13
11.–12.	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Luboš Ptáček	12	5	4	3				12	12
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Miroslav Vetrik	12	2	3	3	4			12	12
13.–15.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Stanislav Basovník	75					11		11	11
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Jozef Cmar	36	1	3	1		4	2	11	11
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Monika Martinisková	16			1		10		11	11
16.–18.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Lenka Studničná	80	3	3				4	10	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Petr Morávek	10	2	5	3				10	10
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Havlik	10	5	5					10	10
19.–20.	Peter Greškovič	9	2	3	3			1	9	9
	Jaroslav Šeděnka	9			3			6	9	9
21.–25.	Prof.$^{\mathrm{MM}}$ Martin Demín	242	1	4	2			1	8	8
	Adam Šugl	8	3	2	3				8	8
	Zbyněk Konečný	8						8	8	8
	Marek Scholz	8		5	3				8	8
	Jiří Milička	8	3	3	2				8	8
26.–28.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Ľuboš Uličný	24		4	3				7	7
	Martin Holeček	7	3	1	3				7	7
	Tomáš Javůrek	7	2	3	2				7	7
29.–30.	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Růžek	49	3	3					6	6
	Bc.$^{\mathrm{MM}}$ Jan Rieger	18			3	3			6	6
31.–34.	Dr.$^{\mathrm{MM}}$ Michal Demín	58	3		2				5	5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Helena Kubátová	48				5			5	5
	Mgr.$^{\mathrm{MM}}$ Karla Procházková	31	3		2				5	5
	Jiří Borkovec	5	3	2					5	5
35.	Pavel Procházka	4	2	2	0				4	4

Pořadí	Jméno	$\sum_{-1}$	Úlohy r1	r2	r3	t1	t2	t3	$\sum_0$	$\sum_1$
36.–44.	Mgr.$^{\text{MM}}$ Vojtěch Kubáň	28			3				3	3
	Bc.$^{\text{MM}}$ Jindřich Soukup	13			3				3	3
	Hana Suchomelová	3			3				3	3
	Martin Konečný	3	1		1			1	3	3
	Jana Przeczková	3	1			2			3	3
	Přemysl Šrámek	3	1					2	3	3
	Antonín Špaček	3		3					3	3
	Tereza Hlaváčová	3	3						3	3
	Bc.$^{\text{MM}}$ Petra Malá	17	2						2	2
45.–47.	Milan Dvořák	2	2						2	2
	Jan Šácha	2	1	1					2	2
	Pavla Grubhofferová	6	1						1	1
48.–49.	Jiří Krejčí	1	1						1	1

Sloupeček $\sum_{-1}$ je součet všech bodů získaných v našem semináři, $\sum_0$ je součet bodů v aktuální sérii a $\sum_1$ součet všech bodů v tomto ročníku (tedy pro řešení první série musí být $\sum_0 = \sum_1$).

Tituly uvedené v předchozím textu slouží pouze pro účely M&M.

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.