Studentský matematicko-fyzikální časopis

Časopis M&M

Časopis je určen pro středoškoláky a probíhá formou korespondenčního semináře. Nabízí zadání zajímavých úloh a také témat, nad kterými můžeš bádat. Tvé příspěvky k tématům pak budou publikovány v časopise.

Je mezioborový – na své si v něm přijdou matematici, fyzici i informatici. Chceme ukázat, že matematika a fyzika spolu souvisejí a občas je užitečné použít i počítač.

Soustředění

Pro řešitele každoročně pořádáme na různých místech Čech a Moravy dvě týdenní soustředění. Na nich máš možnost seznámit se s lidmi podobného smýšlení nebo potkat staré známé, vyzkoušet si, že fyzika skutečně funguje (na minulých soustředěních jsme například fotili plechovkou od okurek, stavěli rádio, vyráběli vzducholoď nebo pozorovali skvrny na Slunci). Můžeš si vyslechnout řadu přednášek z matematiky, z fyziky a z informatiky a občas i z jiných oborů a také si zkusit přednést ostatním výsledky svého vlastního bádání. Program soustředění samozřejmě není jen odborný. Neodmyslitelně k němu patří spousta her. Máš tak skvělou možnost poznat okolní krajinu (ve dne i v noci), ostatní účastníky a také sebe. Na našich webových stránkách si můžeš prohlédnout fotky z několika minulých soustředění.

Účastníky soustředění vybíráme podle umístění ve výsledkové listině.

Jak M&M probíhá

Zpravidla šestkrát do roka dostaneš poštou (samozřejmě zdarma) nové číslo časopisu se zadáním úloh a témat. Zhruba měsíc máš na přemýšlení o zadaných problémech. Nejpozději do termínu, který je uveden na začátku každého čísla, pošli svoje řešení na adresu redakce. Opravené a obodované příspěvky ti zašleme zpět spolu s dalším vydáním časopisu.

Celý rok tě na obrázcích v časopise bude provázet lišák Riki, maskot semináře M&M.

Témata

Během roku otevíráme asi sedm témat. Téma není na rozdíl od úloh striktně zadané, ale je to námět k přemýšlení. Můžeš nám poslat jak řešení zadaných úkolů, tak návrhy dalších otázek a řešení problémů souvisejících s tématem, teoretické i experimentální výsledky svého bádání a cokoliv dalšího, co tě k danému námětu napadne.

Příspěvek k tématu můžeš zaslat kdykoliv během roku. Tvůj článek pak otiskneme v časopise. Počet tvých příspěvků k jednomu tématu není nijak omezen – své úvahy můžeš dále rozvíjet, doplňovat je, případně i vyvrátit.

Můžeš reagovat na články svých kolegů, použít jejich výsledky ve svém dalším řešení, ale můžeš navrhnout i zcela jiný přístup k problému.

Také nám můžeš poslat vlastní návrh na nové téma z matematiky, z fyziky nebo z informatiky. Pokud bude zajímavé, uveřejníme jej v dalším čísle M&M a tebe bodově ohodnotíme.

Hodnocení

Bodové hodnocení úlohy (zpravidla 3–5 bodů) je uvedeno v jejím zadání. Příspěvek k tématu hodnotíme podle jeho kvality, náročnosti a originality. Za dobrý příspěvek můžeš získat i více než 20 bodů.

M&M má jednu zvláštnost, a to udělování titulů. Jakmile dosáhneš určité bodové hranice (sčítají se i body z předchozích ročníků M&M), získáš seminární titul, který bude uveden u každého tvého příspěvku a ve výsledkové listině. Už za 10 bodů získáš titul Bc.$^{\mathrm{M}}$, za 20 budeš Mgr.$^{\mathrm{M}}$, pokud dosáhneš na hranici 50 bodů, stane se z tebe Dr.$^{\mathrm{M}}$, při stovce bodů získáš titul Doc.$^{\mathrm{M}}$ a při 200 bodech už budeš Prof.$^{\mathrm{M}}$. Výzvou pro tebe může být získání titulu Akad.$^{\mathrm{M}}$ za 500 bodů – této mety ještě nikdo nedosáhl.

WWW a e-mailová konference

Na našich webových stránkách `http://mam.mff.cuni.cz` se můžeš dozvědět o M&M další informace, je možné nahlédnout do archivu minulých ročníků časopisu. Naši řešitelé mohou mezi sebou komunikovat prostřednictvím e-mailové konference. Pokud se do ní chceš přihlásit, obrať se na nás nebo si najdi návod k přihlášení na stránkách `http://mam.mff.cuni.cz/?stranka=konference`

Soutěžní pokyny

S prvním řešením nám prosím pošli lístek se jménem, adresou pro korespondenci (kam chceš, abychom ti posílali časopis a opravená řešení), adresou školy, ročníkem a rokem, kdy budeš maturovat. Pokud přidáš i e-mail a telefonní číslo, budeme rádi. Řešení každé úlohy a tématka piš prosím vždy na zvláštní podepsaný papír.

Do řešení M&M se můžeš zapojit kdykoliv během školního roku. Nemusíš posílat vše, stačí, když budeš řešit to, co tě baví. Má smysl poslat i náznak řešení. Nepiš jenom výsledky! Důležitější než čísla jsou myšlenkové postupy, kterými ses ubíral.

Pokud chceš potvrzení, že jsme tvé řešení v pořádku dostali, napiš nám a uveď e-mailovou adresu, kam ti ho máme posílat.

Řešení můžeš posílat také e-mailem na naši adresu uvedenou na konci každého čísla. Nejprve si ale prosím přečti technické pokyny na stránkách `http://mam.mff.cuni.cz/?stranka=el_reseni`

A kdo jsme my?

Organizátoři M&M jsou většinou studenti různých oborů Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy, často bývalí řešitelé semináře. Během roku vymýšlíme úlohy, opravujeme řešení a připravujeme soustředění. Těšíme se, že na tom dalším se setkáme třeba právě s tebou.

B.B., Bzučo, Hanss, Charlie, Jarka, Jirka, Jožo, Krsoň, Lenka, Marble, Martin, Maťa, Mirek, Ondra, Peťo, Riki, Taťka, Teka a Ziki

M&M Studentský matematicko-fyzikální časopis
ročník X číslo 1

Termín odeslání: 27. 10. 2003

Pokud chcete získat body pro účast na podzimním soustředění, pošlete nám řešení nejpozději do 4. 10. 2003. Až do řádného termínu můžete svá řešení doplňovat a opravovat.

Milí kamarádi,

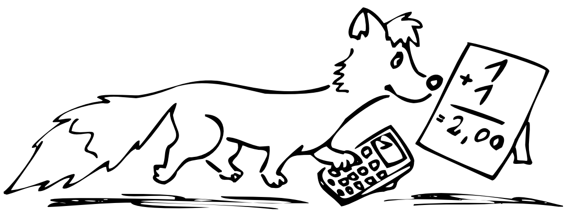
je tu už desátý ročník časopisu M&M. Jeho první číslo přináší zadání nových úloh a témat a také informace o podzimním soustředění, které se bude konat od 18. do 26. října 2003 ve východních Čechách nebo na Moravě. Pozveme nejlepší řešitele minulého roku a také ty, kdo nám pošlou do 4. 10. 2003 dobré řešení některých úloh a témat z tohoto čísla. Dejte nám zároveň vědět, zda máte zájem zúčastnit se soustředění. Pokud se chcete na něco zeptat, obraťte se na Marbla – telefon +420 776 057 787.

Nezapomeňte prosím, že řešení každé úlohy nebo tématka je třeba psát na zvláštní podepsaný papír.

Také bychom byli rádi, kdybyste nám poslali s prvním řešením informaci o tom, v kterém roce budete maturovat. Chceme si udělat pořádek v databázi.

Na vaše příspěvky se těší

Redakce M&M



Zadání témat

Téma 1 – Oko a stroboskopie

Oko je zároveň velmi dokonalý i nedokonalý orgán. Některé jeho zajímavé vlastnosti se projeví ve chvíli, kdy pozorujeme děje s vysokou frekvencí.

Například skutečnosti, že dostatečně rychle se měnící statické obrazy vnímáme jako plynulý pohyb, využívá filmový záznam. Stejně tak by bez nedokonalosti oka nemohly fungovat monitory, kde je pomocí jediného pohybujícího se paprsku[1] vykreslována celá plocha obrazovky.

V tomto tématu se budeme zabývat právě jevy souvisejícími se vnímáním dějů s vysokou frekvencí okem. Jako námět ke zkoumání vám předkládáme následující problémy:

a. Prozkoumejte (zejména experimentálně), jak oko registruje pohyb. Proč vidíme některé děje spojité a jiné ne? Při jaké frekvenci se stávají pozorované děje spojitými?
b. V televizi (ve filmu) je občas vidět, že jedoucím autům se točí kola na opačnou stranu, než se pohybují. Vysvětlete tento jev a určete, za jakých podmínek nastává.

   Je možné, aby bylo vidět, že se jedno kolo auta otáčí na jednu stranu a druhé na opačnou? Pokud ano, za jakých podmínek? Svoji domněnku dokažte.

   Jak bude v televizi (ve filmu) vypadat auto, které se rozjíždí z klidu?
c. Vzdálený, dostatečně velký objekt je od vás oddělen laťkovým plotem. Ukazuje se, že objekt za ním si můžete prohlédnout, pokud nebudete u plotu stát, ale pojedete podél něj autem. Vysvětlete tento jev a určete potřebnou rychlost pohybu, když a je šířka laťky plotu, b šířka mezery mezi laťkami a L naše vzdálenost od plotu ($L \gg a, b$). Úhlová velikost objektu α je mnohem větší než poměr b/L.
d. Navrhněte a sestrojte barevné a černobílé rotující disky – například z kartonu vystřihněte kruh, nalepte na něj papír s vámi zvoleným vzorem a připevněte k tužce. Popište, jak se změní vzor a barva jejich povrchu v závislosti na rychlosti rotace.
e. Na základě experimentů v předchozím bodě odhadněte vzorkovací frekvenci oka. *Vzorkovací frekvence oka* je frekvence, při které oko přestává pohyb vidět jako trhaný a začíná jej vnímat jako pohyb spojitý.
f. Navrhněte stroboskopický přístroj[2], který bude měřit frekvenci nějakého periodického děje bez pomoci fotografie.
g. Experimentálně určete obnovovací frekvenci obrazu televizoru nebo monitoru.
h. Vezměte klacek a položte jej do ohně. Po vytažení a uhašení plamenů jej roztočte. Jak rychle musíte točit, aby jste viděli svítící kruh? Při nižší frekvenci otáčení (asi $0{,}5\,\mathrm{s}^{-1}$ až $1\,\mathrm{s}^{-1}$) je vidět červený pruh a na opačné straně kruhu modrá šmouha. Vysvětlete, jak tato šmouha

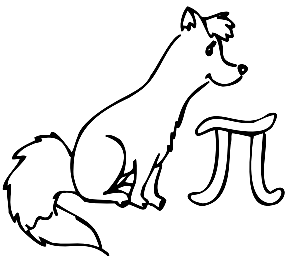
[1] U barevných monitorů to jsou tři paprsky.

[2] Stroboskop je přístroj, jenž pomocí záblesků v pravidelných intervalech umožňuje zviditelnit periodické jevy, které jsou příliš rychlé, než aby je lidské oko bylo schopno přímo pozorovat (poměr frekvencí blikání a jevu musí být samozřejmě vhodně zvolen).

vzniká a proč má modrou barvu. Co se stane, když místo doutnajícího klacku použijeme zelené světlo (např. svítivou diodu)?

Téma 2 – n-rozměrné prostory

Toto téma navrhli Dr.MM Stanislav Basovník a Mgr.MM Jan Olšina. Redakce doufá, že se vám bude líbit.



Dříve, než začneme cokoliv podnikat s n-rozměrnými prostory, je třeba říci, co n-rozměrný (n-D) prostor je. Záměrně se vyhýbáme přesné definici. Nahlédneme, že v n-rozměrném (euklidovském) prostoru je bod dán n souřadnicemi, vzdálenost dvou bodů s (a tedy i délka přímky mezi těmito body) je dána rozšířenou Pythagorovou větou

$$s^2 = \sum_{i=1}^{n} (\Delta x_i)^2 ,$$

tedy čtverec vzdálenosti získáme sečtením čtverců rozdílů všech souřadnic.

Následují některé z problémů, které můžeme v těchto prostorech zkoumat:

- Snadno nahlédneme, že objem n-rozměrné krychle je $V = a^n$. Jaký je její povrch? Jaký je objem a povrch n-rozměrného kvádru, pravidelného hranolu, jehlanu? Podstavou posledních dvou zmíněných těles je $(n-1)$-rozměrný pravidelný mnohostěn.
- Pravidelným $(n+1)$-stěnem v n-rozměrném prostoru nazveme zobecnění rovnostranného trojúhelníku ve 2-D, či čtyřstěnu ve 3-D, tedy útvar, který má všechny hrany stejné délky, ve všech vrcholech hrany svírají stejné úhly, stejně jako stěny na hranách. Jeho stěnou je potom $(n-1)$-rozměrný pravidelný n-stěn. Jaký je povrch a objem tohoto útvaru?
- Jaký je objem a povrch n-rozměrné koule? Dokážete totéž zjistit pro válec, kužel a podobné útvary? Ve 3-D prostoru se objem válce s příslušnou výškou vynásobí koeficientem $1/3$ a dostaneme objem kužele stejné podstavy. Má tento zákon nějakou obdobu v n-D?
- Kromě vrcholů (hrany dimenze 0), stěn (hrany dimenze $(n-1)$) má n-rozměrná krychle určitý počet k-rozměrných hran (které nejsou ani stěnou ani vrcholem – prostě spojují vrcholy nebo $(k-1)$-rozměrné hrany). Dokážete určit jejich počet v závislosti na n?
- Už vám někdo položil zákeřnou otázku: „Jaký je průnik dvou rovin ve čtyřrozměrném prostoru?“ nebo „V kolika rozměrném prostoru mohou být dva trojrozměrné prostory mimoběžné?“ Jak je to s průnikem k-rozměrného a l-rozměrného prostoru v n-rozměrném prostoru?

Redakce si dovoluje upozornit na další problémy, které se jí zdají zajímavé:

- Určete všechna platónská tělesa v těchto prostorech.
- Spočtěte polohu těžiště n-rozměrného jehlanu (simplexu), poloměr hyperkoule[3] vepsané a opsané hyperkrychli a hyperjehlanu[4], povrchy těles …
- Vyplňte n-rozměrný prostor pravidelnými m-stěny (dimenze m-stěnu je stejná jako dimenze prostoru). Pravidelný m-stěn je konvexní útvar se stěnami tvořenými stejnými pravidelnými $(n-1)$-stěny, který má hyperkouli opsanou.

Téma 3 – Výstavba sítí

Firma *Superfast Internet Slovakia*, zabývající se výstavbou optických datových sítí, narazila na následující problém. Svými linkami propojuje lokální sítě v jednotlivých městech. Je nutné, aby existovalo nějaké spojení mezi každými dvěma městy. Přitom je ale potřeba, aby celková délka sítě byla co nejmenší, protože kvalitní optické kabely jsou velmi drahé. Pro firmu *Superfast Internet Slovakia* není problém postavit kdekoliv rozbočovač, který spojuje více kabelů, a těchto rozbočovačů má k dispozici dostatečný počet za zanedbatelnou cenu.

Úkolem projektantů je nalézt takovou síť spojující jednotlivá města, která může mít libovolný počet uzlů v libovolných místech (i mimo města), ale celková délka všech spojů (hran) musí být co nejmenší.

V současné době firma hodlá propojit několik měst na jihu Slovenska. Souřadnice přípojného bodu pro každé město jsou uvedeny na přiložené mapce (obr. 1). Projektanti si s takto složitým problémem nevěděli rady, takže ředitelství firmy pověřilo redakci časopisu M&M vyhlášením konkurzu o nejlepší projekt splňující výše uvedené požadavky. Jediným kritériem je tedy celková délka spojů a podle ní redakce došlé návrhy ohodnotí. Uzávěrka konkurzu je ve stejnou dobu jako uzávěrka tohoto čísla.

Mimo tohoto akutního problému existuje ještě spousta dalších, které by firma měla také ráda vyřešené, ale spíše než rychle dodané řešení ji zajímá správnost, a očekává tedy přesná zdůvodnění a důkazy. Některé z těchto problémů jsou:

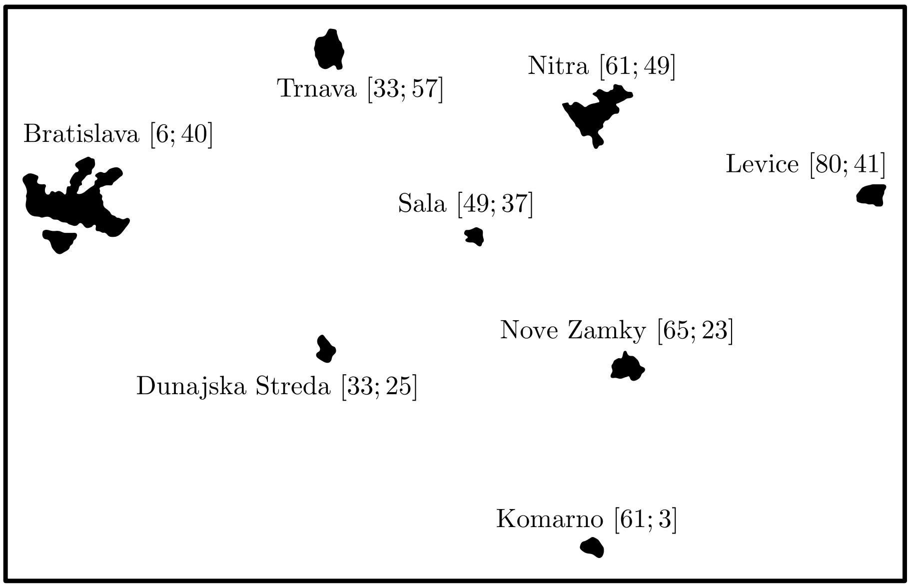
- Jak má vypadat optimální síť propojující právě tři města?
- Jak by měla vypadat síť mezi čtyřmi městy, která leží ve vrcholech čtverce nebo obdélníku? Dokážete najít řešení i pro obecnější čtyřúhelník?

[3] Předponou hyper- (případně nad-) míníme zobecnění objektu známého ze dvourozměrného nebo z třírozměrného prostoru do více dimenzí.

[4] Hyperjehlan je útvar, který má všechny vrcholy mimo jednoho umístěny v jedné nadrovině (tyto vrcholy tvoří podstavu) a poslední vrchol leží mimo tuto nadrovinu.

- Co musí splňovat každé optimální řešení?

Dále můžete také posílat libovolné vlastní příspěvky týkající se tohoto nebo podobného problému. Mohou to být postupy vedoucí k „různě dobrým“ přibližným řešením, počítačové algoritmy a cokoliv dalšího, co vás napadne.



Obr. 1 – Mapa měst, která je potřeba propojit.

Zadání úloh

Úloha 10.1 – O nemožnosti sestrojit létající stroj těžší než vzduch (5b)

Pařížská akademie není zrovna nakloněna inovativním řešením problémů. Odmítá se zabývat perpetuem mobile, padání kamenů z nebe je podle ní výmysl opilých staříků, jenom blázen se může pokoušet sestrojit létající stroj těžší než vzduch . . .

Promluvte k pařížské akademii a přesvědčte veleváženě pány fyziky, že je možné sestrojit létající stroj těžší než vzduch.

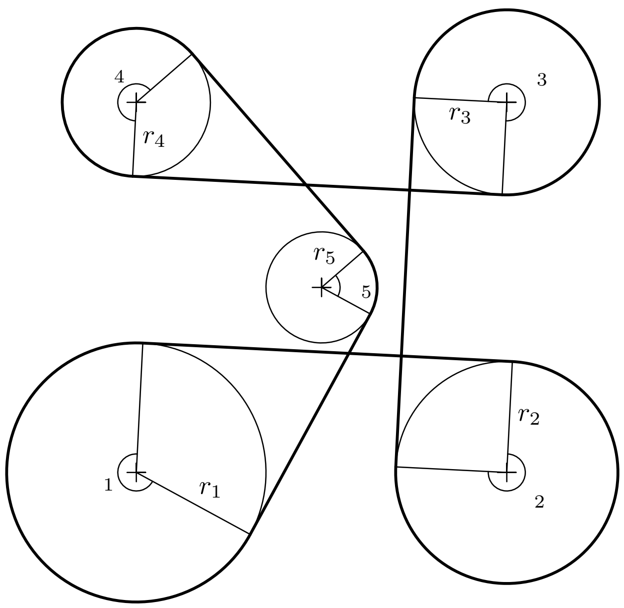
Úloha 10.2 – Brontosaurus (5b)

Jaká je pravděpodobnost, že ve skleničce vody, kterou jste právě vypili, byla i molekula vody, která byla kdysi součástí těla brontosaura, jehož kost se nachází v pařížském přírodovědeckém muzeu.

Úloha 10.3 – Napnutý provázek (3b)

Spočtěte, jaký úhel opíše provázek okolo pěti kruhů se středy ve vrcholech čtverce a v průsečíku jeho úhlopříček. Úhel opsaný kolem kruhů je součet úhlů $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5$. Strana čtverce má délku $a = 20\,\mathrm{cm}$ a poloměry kruhů jsou $r_1 = 7\,\mathrm{cm}$, $r_2 = 6\,\mathrm{cm}$, $r_3 = 5\,\mathrm{cm}$, $r_4 = 4\,\mathrm{cm}$ a $r_5 = 3\,\mathrm{cm}$. Situace je znázorněna na obrázku 2.

Jako bonus se pokuste spočítat, jaký maximální a minimální úhel dostaneme, když můžeme pohnout kruhy tak, aby nedošlo k žádnému dalšímu doteku provázku a kruhů. Provázek je pružný, takže vždy zůstane napnutý.



Obr. 2

Adresa redakce:

M&M, OVVP, UK MFF
Ke Karlovu 3
121 16 Praha 2

Telefon: +420 221 911 235
E-mail: `MaM@atrey.karlin.mff.cuni.cz`
WWW: `http://mam.mff.cuni.cz`

Časopis M&M je zastřešen Oddělením pro vnější vztahy a propagaci Univerzity Karlovy, Matematicko-fyzikální fakulty a vydáván za podpory středočeské pobočky Jednoty českých matematiků a fyziků.