Malý matematicko–fyzikální korespondenční seminář středočeského kraje
(s mezinárodní účastí)

M&M

Zadání 3. série

Termín odeslání této série je **10.3.95.**

1. Úloha

Představte si, že ve vakuu je kulová velmi tenká šlupka celkové hmotnosti M a někde uvnitř hmotný bod v klidu vůči této šlupce. Pokuste se říci, kterým směrem se vlivem gravitační síly začne pohybovat.

2. Úloha

Dokažte, že počet pozic, do nichž lze dostat Rubikovu kostku nějakou posloupností tahů, je dělitelný počtem pozic, do nichž lze dostat kostku ze základní pozice pouze otáčením přední a dolní stěny.

3. Úloha — Malířský problém

Představte si, že jste malířem a máte složitý úkol: Pomocí co nejmenšího počtu šablon napsat na dveře hotelových pokojů všechna trojmístná čísla 000–999. Šablony jsou čtyřmístné a každé trojmístné číslo se píše jedním tahem štětce přes některé tři sousední cifry na šabloně. Např. šablonou 4856 lze napsat čísla 485 a 856. Pozn.: 6 nelze psát jako 9 vzhůru nohama.

4. Úloha — Vorařský problém

Klády dřeva plavou na hladině „naležato“. Pokuste se vysvětlit proč. Jak bude plavat na hladině dlouhá kláda s průřezem rovnostranného trojúhelníka? Najděte její rovnovážnou stabilní polohu! Předpokládejte, že dřevo má poloviční hustotu než voda.

5. Úloha — Mnišský problém

V Japonsku se už v dávných dobách zabývali geometrií a některé opravdu pěkné výsledky věšeli na dřevěných deskách v chrámech (tzv. SAN-GAKU úlohy). Zde je jedna z nich: Mějme kružnici k_1 a její navzájem rovnoběžné tečny t_1, t_2. Dále mějme další dvě kružnice k_2, k_3 mající vzájemný vnější dotyk takové, že každá z nich má vnější dotyk s k_1, t_1 je tečnou k_2 a t_2 je tečnou k_3. Dokažte, že pro poloměry r_1, r_2, r_3 kružnic k_1, k_2, k_3 platí:

$$r_1 = 2\sqrt{r_2 r_3}$$

Opravená tabulka výskedků prvního kola:

poř.	jméno	škola	roč.	1 2 3 4 5	S_1	S_2
1.	Rudolf Sýkora	Olomouc	3.	4 5 5 5 5	24	24
2.	Matouš Jirák	Říčany	3.	4 3 4 4 5	20	20
3.	Martin Krsek	Hradec Králové	4.	2 5 2 5 5	19	17
4.	Marta Bednářová	Brno	4.	4 5 4 - 5	18	16
5.	Daniel Klír	Poděbrady	2.	3 2 - 2 5	12	15
6.	Peter Macák	Bratislava	4.	4 4 5 - 4	17	14
7.	Tomáš Klír	Poděbrady	2.	4 1 - - 5	10	13
8.	Robert Šámal	Praha 5	4.	5 5 - - 5	15	12
9.	Petr Sedláček	Benešov	2.	0 1 1 - 4	6	9
10.	Veronika Štulíková	Beroun	3.	2 - - 1 5	8	8
11.	Tomáš Kolský	Praha 5	2.	3 - - - -	3	6
12.	Anna Jančaříková	Praha 5	3.	- - - - 5	5	5
13.	Jana Koláčková	Praha 8	4.	- - - - 5	5	2

V tabulce je uvedeno pořadí, jméno účastníka, místo školy, ročník, bodové ohodnocení za každou úlohu, S_1 značí prostý součet bodů a S_2 je výsledná bodová hodnota, která zvýhodňuje mladší ročníky oproti starším, ale takovým způsobem, aby 0 zůstávala 0 a plný počet bodů plným počtem. Přesněji řečeno

$$S_2 = int(25(S_1/25)^{r/3}),$$

kde r značí ročník a $int(x)$ značí celou část čísla x.

Všem postiženým se omlouváme (M.Č.). Tím jsem si vzpomněl, že jsem posledně zapomněl nakreslit obrázek k řešení druhé úlohy (M.V.). Řešení druhého kola pošleme až s příštím zadáním. Snad pak budeme vědět i něco o soustředění.

Mějte se krásně!

Martin & Martin