Malý matematicko–fyzikální korespondenční seminář středočeského kraje

M&M

je soutěží o zatím neznámé, ale jistě snad velmi hodnotné ceny.

Už je to čtrnáct dní, co jsme se vrátili ze soustředění MO a FO v Janově, a tak jsme začali přemýšlet, co podnikneme příště. Zatímco některé kraje mívají korespondenční semináře a speciální soustředění—třebas i dvakrát do roka a třebas i v zimě s lyžováním—neměl středočeský kraj nic. To by se mohlo dát změnit. Nemůžeme (snad kromě snahy) slibovat nic předem, a tak posíláme alespoň první serii úloh.

Matematici/fyzici nelekejte se *fyziky/matematiky!* Myslíme si, M jako teoretický fyzik a M jako matematický modelář, že to spolu poněkud souvisí a doufáme, že se to podaří alespoň na některých příkladech ukázat.

Martin Čížek & Martin Vyšohlíd

Soutěžní pokyny: Úlohy, které se vám podaří vyřešit, pošlete na adresu:

M&M – B614
VŠK 17. listopadu
Pátkova 3
182 00 Praha 8, Libeň

Zajímají nás nejen výsledky, ale i jak jste k nim došli. Každou úlohu řešte na zvláštní papír, nahoře uveďte své jméno, číslo úlohy, případně číslo listu. Snažte se prosím psát čitelně—nemusí to být zrovna TEX, ale k luštění hieroglyfů nemáme nadání. K úlohám přiložte lístek se jménem, rodným číslem, ročníkem, adresou školy a adresou pro korespondenci. My vám za to na ni budeme posílat opravená řešení, výsledky a další úlohy.

Řešení každé z úloh bude bodováno 0–5 body—snažte se aby důkazy byly přehledné a úplné—a celkový součet bude mírně modifikován ve prospěch nižších ročníků.

Kol bude asi pět.

Termín odeslání této série je **11.11.94.** Rozhodující je datum poštovního razítka.

Pripravte se . . . pozor . . . teď!

1. Úloha pana Banacha

Na stole je rozložena obdélníková mapa a celá je překryta druhou mapou stejného území v pětkrát větším měřítku.

a) Předpokládejte navíc, že odpovídající si strany jsou rovnoběžné. Dokažte, že vždy existuje takové místo v daném území, že jeho obraz na větší mapě leží přesně nad obrazem v mapě menší.

b) Dokažte, že předchozí tvrzení platí i bez předpokladu rovnoběžnosti stran.

2. Úloha téměř fyzikální

Je dán konvexní mnohostěn. Každé stěně je přiřazen vektor na ni kolmý směřující ven s délkou rovnou obsahu této stěny. Dokažte, že součet vektorů všech stěn je 0.

Motivace: Věta říká, že mnohostěn napuštěný plynem, na který nepůsobí žádné vnější síly, se nezačne působením tlaku tohoto plynu pohybovat. ($F = pS$)

3. Úloha k vodě

Několik metrů od přímého břehu jezera stojí plavčík P. Ve vodě se topí slečna S. Plavčík běhá rychlostí v_1 a plave rychlostí v_2. Najděte dráhu kterou se nejrychleji dostane plavčík k topící se.

Nápověda: Nejrychlejší dráha je stejná jako dráha po níž by se z P do S pohybovalo světlo, kdyby se na souši šířilo rychlostí v_1 a ve vodě v_2. Stačí tedy, když dokážete, že plavčík musí běžet "podle Snellova zákona".

4. Úloha na večerní procházku

Je dána přímka p a na ní dva body A, B ($|AB| = d$) nad nimiž je sestrojen obdélník $ABCD$. Najděte množinu bodů X na úsečce AB pro něž:

$$\Big| |\sphericalangle BXC| - |\sphericalangle AXD| \Big| < 2\varphi \qquad \varphi \in (0, \tfrac{\pi}{4})$$

Uznáváme početní i konstrukční (pravítko&kružítko) řešení.

Motivace: Na protějších březích vodní plochy je ve stejných výškách nad mírně zvlněnou hladinou v bodě D oko pozorovatele a v bodě C zdroj světla. Hladina vody je zvlněna tak, že maximální odklon hladiny od vodorovné plochy je φ. Hledaná množina bodů bude na hladině světélkovat (odrážet světlo z bodu C do bodu D).

Poznámka: Komu se podaří o obrazu na zvlněné hladině zjistit více (například vlastnosti obrazu na hladině v bodech mimo úsečku AB, tvar obrazu …atp.), bude odměněn body navíc.

5. Úloha na dobrou noc

Nakreslete graf množiny bodů splňujících rovnici:

$$\Big| |x| - |y| \Big| - 2(|x| + |y|) + 4 = 0$$